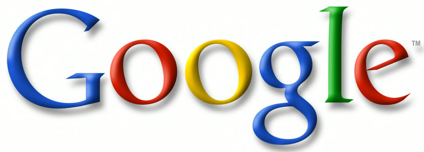
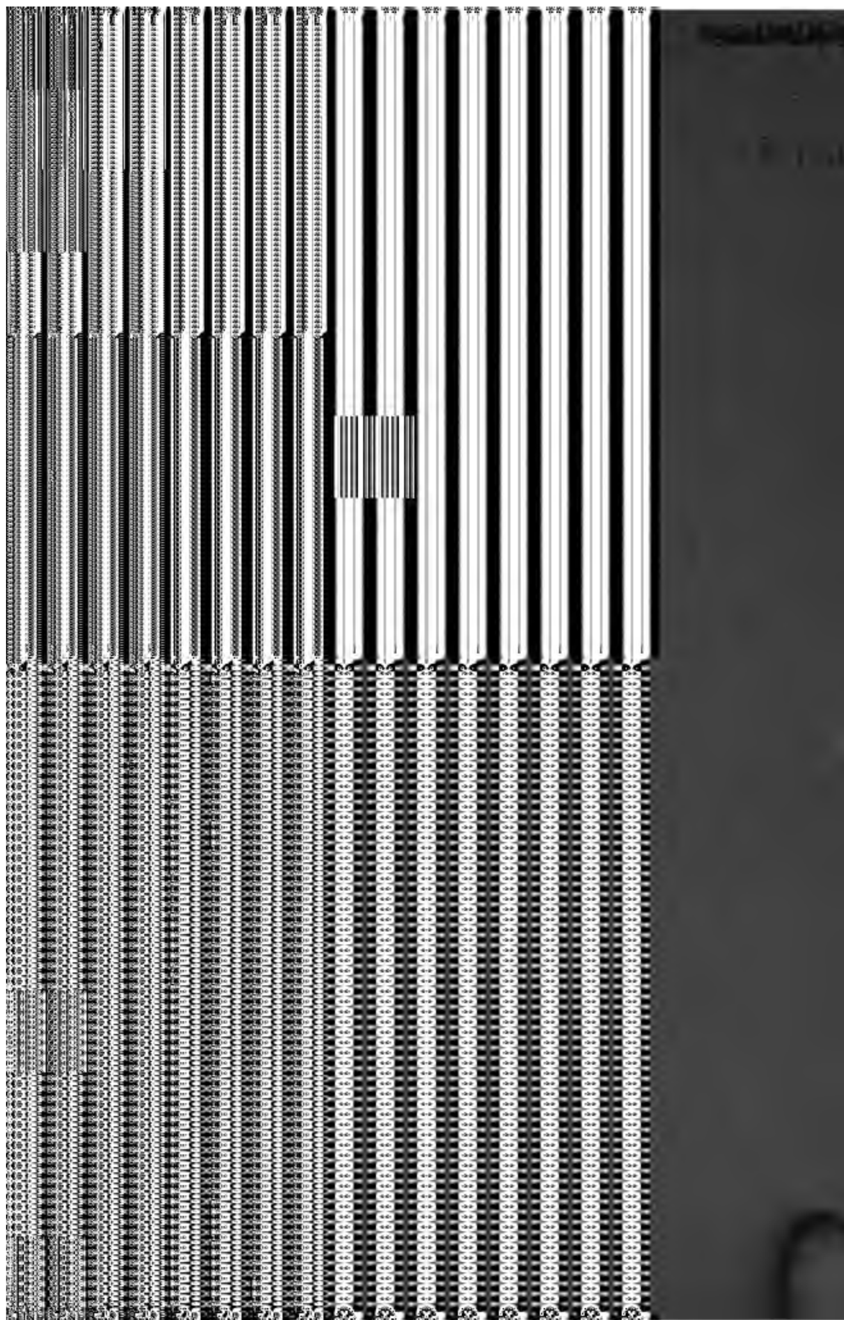






ALGÈBRE

1er CYCLE



A la même Librairie :

OUVRAGES
A L'USAGE DU *PREMIER CYCLE*



ARITHMÉTIQUE, 1er Cycle *(Classes de 4e B et de 3e A)*, suivie de *Notions d'Algèbre* pour la *Classe de 3e A*, par M. ÉMILE BOREL, maître de conférences à l'École normale supérieure. Un vol. in-18 jésus, relié toile . . . . » »

COURS DE PHYSIQUE ET CHIMIE, à l'usage du 1er Cycle, par M. E. DRINCOURT, agrégé des sciences physiques et naturelles, professeur au Collège Rollin :

Classe de 4e B. Un vol. in-12, cartonné. . . . . . . 2 »
Classe de 3e B. Un vol. in-12, cartonné. . . . . . . 2 »

COURS DE SCIENCES NATURELLES, à l'usage du 1er Cycle, par MM. G. COLOMB, docteur ès-sciences, sous-directeur du Laboratoire de Botanique à la Sorbonne, et C. HOULBERT, docteur ès-sciences, professeur de sciences naturelles au Lycée de Rennes :

1. **BOTANIQUE.** *(Classe de 5e A et B).* Un vol. in-18 jésus, relié toile. . . . . » »

2. **GÉOLOGIE** : Phénomènes actuels. *(Classes de 5e B et de 4e A).* Un vol. in-18 jésus, relié toile. . . . . » »

3. **ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE DE L'HOMME.** *(Classe de 3e B).* Un vol. in-18 jésus, relié toile. . . . . » »

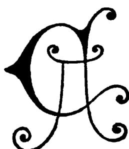


COURS DE MATHÉMATIQUES
RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX NOUVEAUX PROGRAMMES
(31 Mai 1902)

ALGÈBRE

PREMIER CYCLE

PAR
ÉMILE BOREL, 1871 —
Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure.



Paris
LIBRAIRIE ARMAND COLIN
5, Rue de Mézières
1903

PROGRAMMES OFFICIELS DU 31 MAI 1902

ALGÈBRE

Classe de Troisième A.

Emploi des lettres. — Formules algébriques.

Emploi des nombres positifs et négatifs pour la représentation des grandeurs susceptibles d'être portées dans deux sens opposés : longueurs comptées à partir d'un point, temps, vitesses, degrés thermométriques. — Addition, soustraction, multiplication et division des nombres positifs ou négatifs.

Changement de l'origine des abscisses ou de l'origine des temps. — Equation du mouvement uniforme. — Détermination de la position d'un point sur une droite par le rapport de ses distances à deux points fixes de cette droite.

Classe de Quatrième B.

Emploi des lettres. — Formules algébriques.

Emploi des nombres positifs et négatifs pour la représentation des grandeurs susceptibles d'être portées dans deux sens opposés : longueurs comptées à partir d'un point, temps, vitesses, degrés thermométriques. — Addition, soustraction, multiplication et division des nombres positifs et négatifs.

Changement de l'origine des abscisses ou de l'origine des temps.

Equation du mouvement uniforme.

Détermination de la position d'un point sur une droite par le rapport de ses distances à deux points fixes de cette droite.

Classe de Troisième B.

Revision des opérations sur les nombres positifs et négatifs extension aux fractions algébriques des propriétés démontrées en arithmétique. — Monômes ; polynômes ; termes semblables.

Opérations : addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. Division des monômes, d'un polynôme par un monôme.

Résolution des équations du premier degré à une inconnue.

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues. — Exemple de cas d'impossibilité et d'indétermination. — Exemples de résolution de systèmes d'équations numériques comportant plus de deux inconnues (sans théorie générale). — Inégalités du premier degré à une inconnue. — Problèmes ; mise en équation ; exemples simples de discussion des résultats.

Variations de l'expression $ax + b$, représentation graphique.

Equation du second degré à une inconnue. Expression des racines, cas où il n'y a pas de racines ; relations entre les coefficients et les racines ; signes des racines ; problèmes.

Représentation graphique des variations de x^2, $\frac{1}{x}$, etc.

Définition des progressions arithmétiques et géométriques. Expression d'un terme de rang donné au moyen du premier terme et de la raison.

Usage des tables de logarithmes. Intérêts composés.

Si on se limite, comme il paraît très raisonnable de le faire dans cette classe, aux tables à quatre décimales, on familiarisera aussi les élèves avec l'usage des antilogarithmes.

PRÉFACE

En écrivant ce livre, mon but principal a été d'intéresser les élèves; je ne crois pas que le meilleur moyen de les initier aux sciences mathématiques soit d'insister sur les côtés les plus abstraits de ces sciences, de manière à les présenter comme complètement en dehors et au-dessus de la réalité. Quel que puisse être l'intérêt — que je suis loin de contester — de la spéculation pure, il n'est pas douteux que c'est l'observation des faits les plus usuels et les nécessités de la vie pratique qui ont été l'origine de toutes les sciences. A méconnaître cette origine, on s'expose à dégoûter un grand nombre d'excellents esprits, auxquels la science apparaît comme une chose mystérieuse, complètement à part de la vie, alors qu'elle s'y mêle chaque jour.

C'est cette liaison intime entre les formules de l'Algèbre et la réalité journalière que j'ai cherché à mettre en évidence le plus possible, soit dans la théorie, soit dans les exemples, problèmes et exercices; je n'ai pas craint de multiplier les applications, de manière que la théorie apparaisse comme intuitive, et non comme une construction arbitraire de l'esprit;

la définition des nombres négatifs, les règles de la multiplication des nombres positifs et négatifs, la mise en équations des problèmes, la représentation graphique des fonctions, et en particulier de la fonction linéaire, sont illustrées de nombreux exemples concrets. J'ai, de même, insisté beaucoup, à diverses reprises, sur le *choix des unités*, dans les problèmes et les formules.

Les nouveaux programmes prévoient qu'un certain nombre d'élèves terminent leurs études secondaires avec le premier cycle; ils doivent avoir acquis les connaissances pratiques indispensables aux applications usuelles au commerce et à l'industrie : j'espère qu'ils les trouveront ici, en ce qui concerne l'Algèbre.

En même temps, je n'ai négligé aucune occasion d'introduire, toutes les fois qu'on pouvait le faire sans allonger ni compliquer, les notions et les formes de raisonnement dont la connaissance simplifiera la tâche ultérieure de ceux qui pousseront plus loin l'étude de l'Algèbre.

En résumé, j'ai tâché, sans abandonner jamais la rigueur nécessaire, d'être aussi simple et pratique que possible. Je crois avoir été ainsi fidèle à l'esprit des nouveaux programmes qui, s'ils sont appliqués avec les idées de réforme qui ont présidé à leur élaboration, peuvent être l'origine d'une ère nouvelle pour notre enseignement secondaire.

ÉMILE BOREL.

25 mars 1903.

ALGÈBRE

PREMIER CYCLE

CHAPITRE I

EMPLOI DES LETTRES; FORMULES ALGÉBRIQUES

I. EMPLOI DES LETTRES

1. — Il arrive fréquemment que l'on demande de résoudre plusieurs problèmes d'arithmétique dont les énoncés ne diffèrent que par les valeurs des données. Soit, par exemple, les deux énoncés suivants :

On sait que 2 mètres de drap coûtent 6 francs; combien coûtent 3 mètres du même drap?

On sait que 4 mètres de drap coûtent 16 francs; combien coûtent 5 mètres du même drap?

On peut dire que ces deux énoncés constituent *le même* problème, mais avec des données numériques différentes, pour résoudre les deux ques-

tions posées, on aura à faire *les mêmes* raisonnements ; seulement, ces raisonnements ne porteront pas sur les mêmes nombres et par suite les calculs et les résultats différeront.

Lorsque l'on a ainsi plusieurs problèmes se résolvant par les mêmes raisonnements, il est fastidieux de recommencer toujours ce même raisonnement pour trouver la solution ; il est plus commode d'avoir une *règle* qui permette de calculer immédiatement la solution de tous les problèmes d'un même type.

Par exemple, les deux énoncés donnés plus haut rentrent dans le type suivant : *sachant qu'un certain nombre de mètres de drap coûtent un prix donné, combien coûtent tant de mètres du même drap ?* On obtient aisément la règle suivante : *le prix cherché s'obtient en divisant le prix donné par le nombre de mètres qui coûtent ce prix donné et en multipliant le résultat obtenu par le nombre de mètres dont on cherche le prix*[1].

Pour les deux énoncés particuliers que nous avons donnés, on trouve ainsi :

$$\frac{6}{2} \times 3 = 9 \text{ francs},$$

$$\frac{16}{4} \times 5 = 20 \text{ francs}.$$

Mais on ne peut pas ne pas être frappé de la com-

---

1. Pour obtenir une telle règle, il suffirait théoriquement de résoudre *un seul* problème de chaque type ; pratiquement, on ne saurait trop recommander aux débutants d'avoir soin de résoudre directement, en refaisant le raisonnement chaque fois, *de nombreux* problèmes analogues ; c'est seulement ainsi qu'ils comprendront bien la règle et pourront ensuite l'appliquer sans risque d'erreur.

plication verbale de la règle que nous avons donnée, si nous n'avions pas choisi un problème extrêmement simple, cette complication aurait été encore plus grande ; pour comprendre et appliquer la règle, il aurait fallu au moins autant de peine, sinon plus, que pour recommencer complètement le raisonnement direct sur chaque exemple.

2. — L'un des buts de l'Algèbre, *le principal but même de l'Algèbre élémentaire*, est de fournir un *langage abrégé* qui permette d'effectuer aisément des raisonnements généraux et d'énoncer simplement des règles générales.

Dans ce but, au lieu des expressions vagues *un certain nombre de mètres, un prix donné*, etc., on emploie des *lettres* pour désigner les quantités dont la valeur n'est pas *déterminée*, mais peut prendre, suivant les cas, plusieurs *déterminations* différentes, c'est-à-dire être exprimée par des nombres différents.

Reprenant toujours le même exemple, nous énoncerons ainsi le problème général :

Sachant que m mètres de drap coûtent a francs, combien coûtent p mètres du même drap ?

Il est aisé de faire ici le raisonnement général que nous avons omis.

Si m mètres coûtent a francs, un mètre coûtera a divisé par m, ce que l'on écrira $\frac{a}{m}$, et p mètres coûteront p fois plus, c'est-à-dire $\frac{a}{m} \times p$, ce que l'on écrit d'une manière plus abrégée :

$$\frac{a}{m}p.$$

Tel est le résultat qui peut remplacer la règle énoncée tout à l'heure. Si, pour abréger, on désigne par x le nombre inconnu de francs dont la valeur donne la solution du problème, nous pourrons dire que cette solution est donnée par la *formule :*

$$x = \frac{a}{m}p.$$

Cette formule est une *formule algébrique ;* son premier membre est x, son second membre est *l'expression algébrique* $\frac{a}{m}p$.

3. Définition. — *Une expression algébrique est un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par les signes des opérations arithmétiques élémentaires, de telle manière que, si l'on remplace chaque lettre par un nombre, les règles de l'arithmétique permettent d'effectuer les opérations indiquées ; le résultat final du calcul est dit la valeur numérique de l'expression pour les valeurs particulières données aux lettres.*

Par exemple, l'expression algébrique $\frac{a}{m}p$ a pour valeur numérique 9 lorsque l'on y remplace a par 6, m par 2 et p par 3, ou, plus brièvement, *lorsque l'on pose :*

$$a = 6, \quad m = 2, \quad p = 3.$$

La même expression a pour valeur numérique 20 lorsque l'on pose :

$$a = 16, \quad m = 4, \quad p = 5.$$

On voit que la valeur numérique d'une expression

algébrique dépend, en général, des valeurs numériques données aux lettres qui y figurent

II. CALCUL DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

4 — L'exemple que nous venons de donner est particulièrement simple; lorsque les expressions algébriques sont plus compliquées, il pourrait y avoir des doutes sur la marche à suivre pour calculer leur valeur numérique, si l'on ne faisait pas, à ce sujet, *des conventions très précises.*

Soit, pour fixer les idées, à calculer la valeur numérique de l'expression

$$a + bc,$$

dans laquelle on suppose :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4.$$

Si l'on n'avait fait aucune convention, on pourrait hésiter entre les deux modes suivants : ou bien multiplier 3 par 4 et ajouter le produit à 2, ce qui donne :

$$2 + 12 = 14$$

ou bien ajouter 2 à 3 et multiplier la somme par 4 ce qui donne :

$$5 \times 4 = 20.$$

On convient d'adopter *le premier mode;* le second mode, donne, par définition, la valeur numérique de l'expression

$$(a + b)c$$

qui diffère de l'expression proposée en ce que la somme $a + b$ s'y trouve placée entre parenthèses

Nous énoncerons donc la règle suivante, conséquence des conventions adoptées pour l'écriture des expressions algébriques.

Règle. — *Pour calculer la valeur numérique d'une expression algébrique sans parenthèses, on effectue d'abord les multiplications et divisions indiquées, et ensuite les additions et soustractions.*

Dans le cas où il y a des parenthèses, on commence par calculer chaque parenthèse isolément d'après la règle précédente et ensuite on applique cette règle aux opérations restantes.

5. — Soit, par exemple, à calculer la valeur numérique de l'expression :

$$\left(a+\frac{b}{c}d\right)\left(b+\frac{c^2}{d}\right)+(a+12)(b-3)+\frac{c}{d}(a+3),$$

en supposant :

$$a=1 \qquad b=8 \qquad c=4 \qquad d=2.$$

On calculera d'abord les parenthèses en suivant pour chacune la première partie de la règle, on trouvera :

$$1+\frac{8}{4}\times 2=1+4=5,$$

$$8+\frac{4^2}{2}=8+8=16,$$

$$1+12=13,$$

$$8-3=5,$$

$$1+3=4.$$

Ensuite, on effectuera d'après la même règle les opérations restantes, ce qui donne :

$$5\times 16+13\times 5+\frac{4}{2}\times 4=80+65+8=153.$$

La valeur numérique cherchée est donc 153

Soit encore l'expression :

$$\left(a+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\right)\left(a^2+\frac{b}{c}-d\right)+(a+1)\frac{b^2}{c^2d}$$

dans laquelle on donne aux lettres a, b, c, d les mêmes valeurs que dans la précédente ; sa valeur numérique est :

$$\left(1+\frac{8}{4}+\frac{4}{2}\right)\left(1^2+\frac{8}{4}-2\right)+(1+1)\frac{8^2}{4^2\times 2}=5\times 1+2\times 2=9.$$

L'élève doit effectuer les calculs intermédiaires que nous omettons.

6 — On considère quelquefois des expressions plus compliquées, telles que la suivante :

$$\frac{a+b}{c}d+\frac{a+c}{b+d}+\sqrt{a^2+21}.$$

Cette expression ne renferme pas de parenthèses, mais, en revanche, elle renferme des fractions telles que $\frac{a+c}{b+d}$ dont les deux termes, le numérateur $a+c$ et le dénominateur $b+d$ sont des expressions algébriques ; elle renferme aussi un radical portant sur l'expression algébrique a^2+21. Il est donc nécessaire de donner une règle complémentaire, que voici :

Règle — *Les expressions numérateurs et dénominateurs des fractions, ainsi que les expressions placées sous des radicaux doivent être calculées comme si elles étaient entre parenthèses.*

Ainsi l'expression donnée doit être calculée

comme si elle était écrite de la manière suivante :

$$\frac{(a+b)}{c}d+\frac{(a+c)}{(b+d)}+\sqrt{(a^2+21)}.$$

Seulement, on considère comme plus commode de ne pas écrire les parenthèses et cette convention ne peut présenter aucun inconvénient, une fois qu'elle a été comprise.

Si l'on donne aux lettres a, b, c, d, les valeurs suivantes :

$$a=10, \quad b=6, \quad c=8, \quad d=3;$$

les parenthèses ont pour valeurs[1] :

$$\begin{aligned} 10+6 &= 16, \\ 10+8 &= 18, \\ 6+3 &= 9, \\ 100+21 &= 121. \end{aligned}$$

et l'expression elle-même a pour valeur numérique :

$$\frac{16}{8}\times 3+\frac{18}{9}+\sqrt{121}=6+2+11=19.$$

Dans certaines formules, on se trouve conduit à *superposer* les parenthèses, c'est-à-dire à employer plusieurs sortes de parenthèses de formes différentes, comprises les unes dans les autres ; dans ce cas, on doit d'abord calculer les parenthèses intérieures, puis celles qui comprennent celles-là, etc.

7. — Pour donner un exemple concret, traitons la question suivante :

Un héritage est partagé également entre n héri-

1. On dit souvent, pour abréger, *valeur d'une parenthèse* au lieu de *valeur de l'expression renfermée dans la parenthèse.*

tiers; la part de l'un d'eux est égale à une somme de a francs, augmentée de ses intérêts pendant un an à p pour cent, plus une somme de b francs. Quel est le montant total de l'héritage?

Calculons d'abord la part d'un héritier; une somme de a francs placée à intérêts à p pour cent l'an, devient, au bout d'un an :

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right);$$

on doit à cette somme ajouter b francs, ce qui donne pour part d'un héritier :

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b.$$

Pour avoir le montant total de l'héritage nous devons, puisque les parts sont égales, multiplier cette part par le nombre n des héritiers; pour indiquer cette opération, nous emploierons des parenthèses d'une autre forme, de sorte que le montant x de l'héritage sera donné par la formule [1] :

$$x=n\left[a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b\right].$$

Si l'on a, par exemple :

$$n=4, \qquad a=100, \qquad p=3, \qquad b=500,$$

---

1. On pourrait, à la rigueur, n'employer qu'une seule sorte de parenthèses; mais, dans les formules un peu compliquées, il faudrait une très grande attention pour associer correctement le commencement et la fin d'une même parenthèse; il est plus commode d'employer des signes qui diffèrent, soit par la forme, soit tout au moins par les dimensions.

on obtient :

$$x = 4(103 + 500) = 4 \times 603 = 2412.$$

Le montant demandé est donc 2412 francs.

Comme exercice sur les parenthèses multiples considérons encore l'expression

$$\left[(a^2+b)(c-d)+\frac{a+b}{c+d}\right]\left[(a+b)(c^2-d^2)+\frac{a}{c}(b+d)\right]+ab$$

dans laquelle on suppose :

$$a=4, \quad b=8, \quad c=2, \quad d=1.$$

On obtient :

$$\left(24 \times 1 + \frac{12}{3}\right)\left(12 \times 3 + \frac{4}{2} \times 9\right) + 4 \times 8$$
$$= 28 \times 54 + 32 = 1544.$$

L'élève doit effectuer les calculs intermédiaires que nous avons omis.

III. REMARQUES

8. — Nous apprendrons plus loin, en étudiant le calcul algébrique, à transformer les expressions algébriques, ou à remplacer une expression algébrique par une expression algébrique *équivalente*, On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes* lorsqu'elles prennent la même valeur numérique *dans tous les cas*, c'est-à-dire quelle que soit la manière dont on choisit les valeurs numériques des diverses lettres qui y figurent. Par exemple, on

constate aisément que les deux expressions

$$(a+b)(a-b)$$
$$a^2-b^2$$

sont équivalentes.

Mais, avant d'étudier le calcul algébrique, il est préférable d'apprendre le calcul des nombres négatifs, afin d'embrasser aussi les cas où les lettres qui figurent dans les expressions considérées sont remplacées par des nombres négatifs. De plus, bien qu'il soit en général possible, en appliquant les règles du calcul algébrique, de faire disparaître la plupart des parenthèses, c'est-à-dire de remplacer une expression renfermant des parenthèses, par une expression équivalente n'en renfermant plus, il est utile de savoir calculer directement la valeur numérique d'une expression compliquée de parenthèses. On en trouvera de nombreux exemples dans les exercices sur ce premier chapitre.

9\. — Remarque sur le choix des unités. — Lorsque l'on applique une formule à un problème concret quelconque, le résultat est généralement un nombre concret; c'est un certain nombre de francs, de mètres, de kilogrammes, etc. De même, les nombres qui figurent dans la formule sont aussi des nombres concrets. Dans ce cas, il est essentiel de remarquer que la *formule n'est exacte que si les divers nombres concrets qui y figurent sont mesurés avec des unités appropriées;* en même temps que l'on donne la formule, *il est indispensable de faire connaître ces unités; sans quoi la formule n'a pas de sens.* Par exemple, considérons un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle et rempli avec de l'eau à son maximum de densité. Si les dimensions des arêtes du parallélépipède sont désignées par

a, *b*, *c*, le poids P de l'eau est donné par la formule

$$P = abc.$$

Cette formule n'a un sens que si l'on ajoute que, *a*, *b*, *c* désignant des décimètres, P désignera des kilogrammes.

Il serait d'ailleurs possible de dire aussi que *a*, *b*, *c* sont exprimés en mètres et P en tonnes, ou que *a*, *b*, *c*, sont exprimés en centimètres et P en grammes; il y a toujours, pour une même formule, bien des manières différentes de choisir les unités; mais nous n'avons pas à étudier ici les relations qu'ont entre elles ces diverses manières; ce qui est essentiel, c'est de ne pas oublier le principe suivant :

Toute formule renfermant des grandeurs concrètes est démontrée en supposant ces grandeurs mesurées avec certaines unités; pour se servir de la formule, il est aussi nécessaire de connaître ces unités que la formule elle-même.

10. — Remarque sur les notations en algèbre. — Nous avons dit que l'emploi des lettres constitue *un langage abrégé;* nous disons *a* francs au lieu de dire *un certain nombre de francs* ou *la somme indiquée dans l'énoncé*. Comme tout langage, la notation algébrique est *arbitraire;* c'est-à-dire que nous pouvons, à notre choix, lorsque nous voulons désigner un certain nombre de francs, le désigner par *a*, ou par *b*, ou par A, ou par Z, etc. La seule chose qui soit indispensable, c'est que la notation soit *cohérente.* On entend par là que, dans une même question, une lettre déterminée a un sens unique et bien déterminé, c'est-à-dire désigne une seule quantité, et toujours la même.

Ce serait cependant une grave erreur de croire qu'il est complètement indifférent de choisir telle ou telle notation; lorsque, dans une même question, on introduit un grand nombre de lettres, il y a très grand avantage à ne pas les introduire au hasard, mais à suivre des règles consacrées par l'usage, auxquelles on s'habitue très vite [1]. L'un des plus

1. Il est clair qu'un langage quelconque est d'autant plus aisé à retenir qu'il est plus cohérent, même si ce langage n'est créé que pour quelques instants. Par exemple, on éprouverait des difficultés sérieuses à parler, ne fût-ce que pendant peu de temps une langue dans laquelle les verbes *entrer* et *sortir* auraient la même signification qu'en français, mais dans laquelle le substantif

anciens de ces usages consiste à désigner les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d, f, g, h, et les quantités inconnues par les dernières x, y, z, u, v, w.

Mais ce n'est pas tout; il est certaines associations de lettres qui sont plus habituelles que d'autres; de telle manière que les algébristes regardent certains groupes de lettres de l'alphabet, formés généralement de lettres consécutives, comme devant être introduits simultanément. Ainsi, si l'on a trois quantités analogues, on les désigne volontiers par a, b, c, ou par f, g, h, ou par l, m, n, ou par p, q, r, ou par x, y, z, ou par u, v, w. Mais on n'a pas l'habitude de les désigner par n, o, p, par exemple, ou par e, f, g. De plus, on associe volontiers entre elles les lettres occupant le même rang dans chacun de ces groupes. Par exemple, si l'on a trois sommes d'argent placées à intérêt à trois taux différents, on désignera les trois sommes par a, b, c, les trois taux par p, q, r, et les valeurs de ces sommes au bout d'un an par x, y, z, de telle manière que l'on aura :

$$x = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$
$$y = b\left(1 + \frac{q}{100}\right)$$
$$z = c\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Ces formules sont plus aisées à écrire sans erreur que ne le seraient les suivantes :

$$z = a\left(1 + \frac{q}{100}\right)$$
$$x = b\left(1 + \frac{d}{100}\right)$$
$$y = r\left(1 + \frac{c}{100}\right).$$

dans lesquelles les trois sommes sont désignées par a, b, r et les trois taux par q, d, c.

On emploie aussi quelquefois, en même temps que les petites lettres, les grandes lettres de même nom A, B, C,

---

entrée désignerait l'action de sortir et le substantif *sortie* l'action d'entrer.

X, Y, Z; mais on évite cet emploi des grandes lettres dans les questions où il pourrait y avoir confusion avec les notations de la géométrie.

Les lettres grecques sont d'un usage plus fréquent; on les introduit aussi par groupes, correspondant à certains groupes de lettres usuelles; ainsi α, β, γ (alpha, bêta, gamma) correspondent à : a, b, c; λ, μ, ν (lambda, mu, nu) correspondent à l, m, n; ξ, η, ζ (ksi, êta, dzêta) correspondent[1] à x, y, z. Nous éviterons l'emploi de ces lettres dans le cours, afin de ne pas ajouter de difficulté supplémentaire pour les élèves auxquels elles ne sont pas familières, mais nous les introduirons dans quelques exercices, car il est nécessaire de s'habituer peu à peu à leur emploi, presque indispensable quand on pousse un peu loin l'étude des mathématiques.

Les notations que nous venons d'indiquer suffisent pour traiter les questions où s'introduisent un petit nombre de quantités analogues; lorsqu'il y en a un grand nombre, on épuiserait vite l'alphabet et l'on aurait des notations difficiles à retenir; aussi est-il préférable, dans ce cas, de désigner les quantités analogues *par une même lettre affectée de divers indices*, c'est-à-dire par a_0, a_1, a_2, a_3,... que l'on énonce *a indice zéro, a indice un, a indice deux*, etc. Dans les cas où l'on ne craint pas de confusion avec des exposants on dit quelquefois, plus brièvement, *a zéro*, *a un*, *a deux*, etc. On emploie aussi les notations a', a'', a''', a^{IV},... que l'on énonce *a prime, a seconde, a tierce, a quarte*....

Supposons, par exemple, que nous voulions écrire une formule indiquant la somme x possédée au bout d'un an par un capitaliste qui, ayant partagé sa fortune en six parties inégales, l'a placée à six taux différents; nous désignerons les parties de la fortune par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 et les taux correspondants par p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, de sorte que nous aurons :

$$x = a_1\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+a_2\left(1+\frac{p_2}{100}\right)+a_3\left(1+\frac{p_3}{100}\right)$$
$$+a_4\left(1+\frac{p_4}{100}\right)+a_5\left(1+\frac{p_5}{100}\right)+a_6\left(1+\frac{p_6}{100}\right).$$

---

1. C'est en vertu d'un usage que l'on fait correspondre η à y; il ne semble pas qu'il y ait de raison autre que l'analogie de forme entre les caractères.

Cette formule est évidemment bien plus simple à écrire et à employer avec ces notations qu'elle ne l'aurait été si l'on avait employé douze lettres différentes, choisies complètement au hasard.

EXERCICES[1] SUR LE CHAPITRE I

1. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$$

en supposant :

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = 4.$$

2. — Calculer la valeur de la même expression, en supposant :

$$a = 2{,}135; \qquad b = 3{,}125; \qquad c = 4{,}005.$$

3. — Calculer la valeur de la même expression, en supposant :

$$a = \frac{3}{4}, \qquad b = \frac{5}{6}, \qquad c = \frac{12}{11}.$$

4. — Calculer la valeur de la même expression, en supposant :

$$a = \frac{2}{3}; \qquad b = 0{,}0034; \qquad c = 3{,}2007.$$

5 — Calculer la valeur de y donnée par la formule :

$$y = a\left[b(a+c) + c^2\right] + (b-c)\left[ab + c(a-b)\right],$$

en supposant .

$$a = 4, \qquad b = 3, \qquad c = 2.$$

---

1. Dans tous ces exercices, on doit calculer les valeurs numériques des expressions données *sans transformer ces expressions*, c'est-à-dire sans effectuer aucun calcul algébrique; les règles de ce calcul seront exposées dans le chapitre IV et suivies d'exercices sur leur emploi.

6. — Calculer la valeur de z donnée par la formule :

$$z = \frac{a(b+c)+c(a+b)}{a\left[b(a+c)+c(a-b)\right]+c} + (b+c)\frac{a}{b-c},$$

en supposant :

$$a = 6, \qquad b = 5, \qquad c = 3.$$

7. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = (a+b)\sqrt{c} + c\sqrt{a+12} + b\sqrt{a-c},$$

en supposant :

$$a = 13, \qquad b = 2, \qquad c = 12.$$

8. — Calculer les valeurs de x, y, z données par les formules :

$$x = A\sqrt{a^2+1} + (A+1)\sqrt{a^2+3},$$
$$y = B\sqrt{b^2+1} + (B+1)\sqrt{b^2+3},$$
$$z = C\sqrt{c^2+1} + (C+1)\sqrt{c^2+3};$$

dans lesquelles on suppose :

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = 4,$$
$$A = \frac{2}{3}, \qquad B = 0{,}03, \qquad C = \sqrt{2}.$$

9. — La longueur d'une barre formée de deux métaux est donnée par la formule :

$$x = a(1+\alpha t) + b(1+\beta t)$$

dans laquelle a et b sont des longueurs exprimées en mètres, t la température en degrés centigrades, α et β deux nombres appelés coefficients de dilatation linéaire ; la longueur x est d'ailleurs aussi exprimée en mètres, comme a et b.

Calculer x sachant que l'on a :

$a = 3$ mètres, $\qquad b = 4$ mètres, $\qquad t = 50$ degrés,
$\alpha = 0{,}00001, \qquad \beta = 0{,}00002.$

10. — Même question, en supposant que α et β aient les mêmes valeurs, mais que l'on ait :

$a = 3$ décamètres, $\quad b = 5$ décimètres, $\quad t = 100$ degrés.

11. — Même question en supposant :

$a = 3$ décimètres, $b = 53$ centimètres, $t = 200$ degrés.

12. — Un capitaliste place à intérêts simples trois sommes a, b, c (exprimées en *francs*), aux taux respectifs p, q, r *pour cent* et *par an;* ces sommes restent placées respectivement pendant A, B, C *années*. Le total des intérêts produits est x *francs*, x étant donné par la formule :

$$x = \frac{apA + bqB + crC}{100}.$$

Calculer ce total en supposant :

$a = 10000$ francs, $p = 3$, $A = 1$ an.
$b = 20000$ francs, $q = 3{,}5$, $B = 2$ ans.
$c = 30000$ francs, $r = 4$, $C = 3$ ans.

13. — Même question, en supposant :

$a = 1000$ francs, $p = 4$, $A = 18$ mois,
$b = 2000$ francs, $q = 5$, $B = 2$ ans 3 mois,
$c = 3000$ francs, $r = 3$, $C = 6$ mois.

14. — Même question, en supposant :

$a = 2$ millions, $p = 3$, $A = 3$ jours.
$b = 3$ millions, $q = 2{,}5$, $B = 2$ jours.
$c = 10$ millions, $r = 2{,}25$, $C = 1$ jour.

(On suppose que l'année financière est de 360 jours.)

15. — Les côtés d'un triangle étant désignés par a, b, c, le demi-périmètre p, la surface S, le rayon du cercle circonscrit R, les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits r, r', r'' r''' sont donnés par les formules :

$$2p = a + b + c$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$R = \frac{abc}{4S}, \qquad r = \frac{S}{p}$$
$$r' = \frac{S}{p-a}, \qquad r'' = \frac{S}{p-b} \qquad r''' = \frac{S}{p-c}$$

Dans ces formules, a, b, c, p, R, r, r', r'', r''' sont exprimés

avec une même unité de longueur et S avec l'unité de surface correspondante. Appliquer ces formules au cas où l'on a :

$$a = 3^{m}, \qquad b = 4^{m}, \qquad c = 5^{m}$$

et vérifier que l'on a :

$$4R = r' + r'' + r''' - r.$$

16. — Appliquer les formules précédentes en supposant :

$$a = 15^{cm}, \qquad b = 41^{cm}, \qquad c = 52^{cm}.$$

17. — Appliquer les formules précédentes en supposant :

1° $a = 3^{cm}$ $b = 3^{cm}$ $c = 4^{cm}$

2° $a = 3^{cm}$ $b = 4^{cm}$ $c = 4^{cm}$

3° $a = 4^{cm}$ $b = 4^{cm}$ $c = 4^{cm}$

18. — Un champ a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives : 2 kilomètres, 3 kilomètres, 1 200 mètres; quel sera le prix de ce champ, si l'hectare de terrain vaut 3 000 fr. ?

19. — Les nombres u_0 et u_1, étant donnés, on suppose que l'on détermine les nombres $u_2, u_3, u_4, u_5, ..$ par les formules :

$$u_2 = 2u_1 + u_0$$
$$u_3 = 2u_2 + u_1$$
$$u_4 = 2u_3 + u_2$$
$$u_5 = 2u_4 + u_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

dont la loi est manifeste, et qui pourraient être remplacées par la formule unique :

$$u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$$

dans laquelle on remplacerait successivement n par 1, 2, 3, 4....

On demande de calculer les 10 premiers nombres u en supposant :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1$$

20. — Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 en supposant que l'on ait :

$$u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$$
$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1.$$

21. — Calculer u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} en supposant que l'on ait :

$$u_3 = u_2 + u_1 + u_0$$
$$u_4 = u_3 + u_2 + u_1$$
$$\cdots\cdots$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$$

et que l'on suppose :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 1.$$

22. — Les nombres u_0, u_1. u_2, u_3,... ou, comme on dit plus brièvement, *les nombres u*, ayant les valeurs calculées dans la question 19; calculer les nombres x_0, x_1, x_2,... (ou *les nombres x*) donnés par les formules :

$$x_0 = \frac{1}{1 + u_0}$$
$$x_1 = \frac{1}{1 + u_1}$$
$$x_2 = \frac{1}{1 + u_2}$$
$$\cdots\cdots$$

formules que l'on peut remplacer par la formule générale unique :

$$x_n = \frac{1}{1 + u_n}.$$

23. — Les nombres u ayant les valeurs calculées dans la question 20, calculer les nombres y donnés par la formule générale :

$$y_n = \sqrt{u_n^2 + 1}$$

dans laquelle on remplacera l'indice n successivement par 0, 1, 2, 3, 4, 5.

24. — Les nombres u ayant les valeurs calculées dans l'exercice 21, calculer les nombres z définis par la formule générale :

$$z_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}.$$

25. — Les nombres u et les nombres z ayant les mêmes

valeurs que dans l'exercice précédent, calculer les 4 premiers nombres s définis par la formule :

$$s_n = \frac{z_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{n+3}.$$

26. — Les nombres u ayant les valeurs calculées dans l'exercice 19, calculer les nombres t donnés par la formule :

$$t_n = \frac{u_n + u_{n+1} + 3\,u_{n+2}}{u_{n+3} + u_{n+4}}.$$

CHAPITRE II

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

I. PRÉLIMINAIRES

11. — Un habitant de Lyon voyage fréquemment sur la grande ligne Paris-Dijon-Lyon-Avignon-Marseille; tantôt il va dans la direction de Paris, tantôt dans celle de Marseille. Chaque jour, il note la distance à laquelle il se trouve de Lyon, lundi, cette distance était de 120^{km}; mardi, de 80^{km}. *Quelle distance a-t-il parcourue de lundi à mardi?* On ne peut pas répondre à cette question, *car les données sont insuffisantes;* il est clair en effet que si les deux villes où le voyageur se trouvait lundi et mardi sont d'un même côté de Lyon, soit du côté de Paris, soit du côté de Marseille, il lui aura suffi de parcourir 40^{km} pour se rendre de l'une à l'autre; si, au contraire, l'une de ces villes est située entre Lyon et Paris, tandis que l'autre est entre Lyon et Marseille, il aura dû parcourir 200^{km}.

On voit, par cet exemple, que, pour traiter une question relative à la situation du voyageur, il est

nécessaire de connaître, non seulement sa distance de Lyon, mais encore *le sens dans lequel il s'est éloigné de cette ville*, soit de Lyon vers Marseille, soit de Lyon vers Paris. Pour distinguer ces deux sens l'un de l'autre on convient de désigner l'un d'eux sous le nom de *sens positif* et l'autre sous le nom de *sens négatif;* si le voyageur s'est éloigné de Lyon de 80^{km} dans le sens positif on conviendra de dire que sa distance à Lyon est $+80^{km}$ (que l'on énonce *plus* 80^{km}); s'il s'est éloigné de 80^{km} dans le sens négatif, on conviendra de dire que sa distance à Lyon est -80^{km} (que l'on énonce *moins* 80^{km}). $+80^{km}$ est un nombre positif, -80^{km} est un nombre négatif.

Les nombres positifs et négatifs apparaissent ainsi tout d'abord comme *une notation abrégée;* il est plus court de dire ou d'écrire : *le voyageur est à* $+80^{km}$ *de Lyon* que de dire ou d'écrire : *le voyageur est à* 80^{km} *de Lyon dans la direction de Marseille.*

Mais cet avantage est loin d'être le seul que présente l'introduction de ces nombres; de plus, ce que nous venons de dire ne suffit pas à faire comprendre pourquoi on emploie, pour les distinguer, les signes + et — de l'addition et de la soustraction, plutôt que d'autres signes quelconques.

Pour mieux nous rendre compte de la signification de ces nombres $+80^{km}$ et -80^{km}, nous allons étudier de près un problème fort simple[1].

12. — Supposons que nous ayons choisi comme

1. Le principe de la méthode que nous allons indiquer est dû à Cauchy. Il l'a exposé dans sa célèbre *Analyse algébrique* de 1821.

sens positif le sens de Lyon vers Marseille et, par suite, comme sens négatif, le sens de Lyon vers Paris, et proposons-nous de calculer la distance qui sépare notre voyageur de Paris, sachant que la distance de Paris à Lyon est de 500^{km}. Si le voyageur est à $+80^{km}$ de Lyon, c'est-à-dire est à 80^{km} dans le sens de Marseille, sa distance de Paris est évidemment :

$$500^{km} + 80^{km} = 580^{km}.$$

Si, au contraire, sa distance de Lyon est -80^{km}, c'est-à-dire s'il s'est éloigné de 80^{km} dans la direction de Paris, sa distance de Paris n'est plus que :

$$500^{km} - 80^{km} = 420^{km}.$$

On voit que, dans les deux cas, la distance du voyageur à Paris s'obtient en écrivant à la suite de la distance de Paris à Lyon 500^{km}, *la distance du voyageur à Lyon avec son signe* et en effectuant l'opération indiquée par ce signe $+$ ou $-$.

Ainsi, lorsqu'on dit que la distance du voyageur à Lyon est $+80^{km}$, cela revient à dire que sa distance de Paris est *plus grande de 80^{km}* que la distance qui sépare Lyon de Paris; si l'on dit que sa distance de Lyon est -80^{km}, cela revient à dire que sa distance de Paris est *moins grande de 80^{km}* que la distance qui sépare Lyon de Paris. La notation abrégée choisie se trouve ainsi parfaitement justifiée.

13. — Voici un exemple d'une autre nature.

Jean, Pierre et Paul sont nés tous trois en janvier 1890; on sait qu'il y a 4 jours d'intervalle entre les dates des naissances de Jean et de Pierre (ou, pour abréger, *entre Jean et Pierre*) et 12 jours entre

Jean et Paul. *Quel intervalle y a-t-il entre Pierre et Paul?*

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de savoir si Pierre et Paul sont nés *avant* ou *après* Jean. S'ils sont nés tous deux avant, ou tous deux après, ils sont séparés par $12 - 4 = 8$ jours; mais, si l'un d'eux est né avant Jean et l'autre après Jean, ils sont séparés par $12 + 4 = 16$ jours.

Pour que l'énoncé soit complet, il ne suffit donc pas de connaître les intervalles qui séparent les naissances de Pierre et de Paul de la naissance de Jean; il est tout aussi nécessaire de savoir si ces naissances ont eu lieu *avant* ou *après* celle de Jean. Si Pierre est né 12 jours *après* Jean, nous dirons que sa naissance, par rapport à celle de Jean, est à $+12$ jours; si Paul est né 4 jours avant Jean, nous dirons que sa naissance, par rapport à celle de Jean, est à -4 jours.

Si, dès lors, Jean est né le 15 janvier, Pierre est né le $15 + 12$, c'est-à-dire le 27 janvier et Paul le $15 - 4$, c'est-à-dire le 11 janvier; Pierre et Paul sont bien séparés par 16 jours.

14. — Prenons encore un autre exemple.

Nous sommes en hiver; hier, à midi, le thermomètre marquait 2°; aujourd'hui il marque 3°; fait-il plus froid aujourd'hui qu'hier? Pour le savoir, il faut d'abord nous enquérir si hier et aujourd'hui le thermomètre était *au-dessus* ou *au-dessous* de zéro; s'il y avait hier 2° *au-dessus* et aujourd'hui 3° *au-dessous*, la température s'est abaissée de 5°; elle s'est relevée, au contraire, d'*un* degré s'il y avait hier 2° *au-dessus* et aujourd'hui 3° *au-dessus*.

Quand le thermomètre est *au-dessus* de zéro, la

température est *plus élevée* que celle de la glace fondante; elle est *moins élevée* lorsque le thermomètre est au-dessous de zéro; il est donc naturel de dire dans le premier cas : la température est $+ 2^\circ$, et dans le second cas, elle est $- 3^\circ$.

II. ADDITION ET SOUSTRACTION DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

15. — Nous allons reprendre d'une manière plus précise la définition des nombres positifs ou négatifs, et montrer en même temps comment on peut en déduire les règles des opérations à effectuer sur ces nombres, en commençant par l'addition et la soustraction.

16. **Segments.** — Considérons d'abord le premier cas que nous avons étudié, où les nombres positifs et négatifs servent à mesurer des longueurs comptées dans des sens opposés.

Pour avoir une image aussi simple que possible figurons une droite indéfinie sur laquelle nous aurons choisi un sens de parcours que nous appellerons *sens positif* et que nous indiquerons par une flèche; une telle droite s'appelle un *axe orienté* ou, plus brièvement, un *axe.* Le sens opposé au sens positif est le *sens négatif.*

On peut se figurer un promeneur qui marcherait sur l'axe, allant tantôt en avant, tantôt à reculons, mais en regardant toujours *vers la direction positive.* Pour aller de A en B (fig. 1) le voyageur marcherait en avant; pour aller de B en A, il irait à reculons. Si ce promeneur fait des pas égaux, il peut mesurer les distances en comptant le nombre

de ses pas; *nous considérerons comme positifs les pas faits en avant et comme négatifs les pas faits à reculons;* de telle sorte que s'il lui faut 50 pas pour parcourir la distance AB on dira que de A vers B il y a + 50 et que de B vers A il y a — 50.

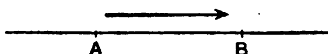


Fig. 1.

On donne le nom de *segment* à une portion d'un axe, lorsque l'on porte son attention sur le sens dans lequel elle est parcourue. Ainsi, lorsque le voyageur va de A vers B, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{AB}$; lorsqu'il va de B vers A, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{BA}$. Ainsi $\overline{AB}$ n'est pas la même chose que $\overline{BA}$: ce n'est pas la même chose d'aller de Paris à Versailles ou de Versailles à Paris; dans les deux cas on parcourt la même distance, désignée indifféremment par la notation AB ou la notation BA, mais on ne marche pas dans le même sens.

Pour exprimer que notre promeneur fait + 50 pas pour parcourir le segment $\overline{AB}$ nous écrirons :

$$\overline{AB} = +50 \qquad \text{ou } \overline{AB} = 50.$$

On écrirait, au contraire :

$$\overline{BA} = -50$$

puisqu'il faut faire — 50 pas pour parcourir le segment $\overline{BA}$, c'est-à-dire faire 50 pas à reculons pour aller de B vers A.

Les nombres 50 et — 50 s'appellent les *équivalents algébriques* des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$, l'unité

choisie étant le pas du promeneur. Bien entendu, on pourrait choisir toute autre unité ; *la seule chose essentielle, c'est de bien préciser quelle unité on choisit et de ne pas en changer dans le cours d'une même question.*

L'équivalent algébrique d'un segment ne dépend pas seulement de l'unité de longueur choisie, il dépend aussi du sens choisi comme positif sur l'axe ; si, la figure restant par ailleurs la même, on changeait la direction de la flèche, c'est $\overline{AB}$ qui aurait pour équivalent — 50 et $\overline{BA}$ qui aurait + 50. Il en est de la direction positive comme de l'unité de longueur; on peut la choisir arbitrairement au début d'une question, *mais il est essentiel qu'elle soit bien précisée et qu'elle ne change pas dans le courant de la question.* La longueur 50 est dite la *valeur absolue* des nombres + 50 et — 50; c'est la longueur commune des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$; ou, si l'on veut, la distance géométrique AB ou BA. D'une manière générale, *on appelle valeur absolue d'un nombre positif ou négatif le nombre que l'on obtient en supprimant le signe.* La valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre

17. — Deux segments situés sur un même axe sont dits égaux lorsqu'ils ont même équivalent algébrique; ils doivent donc avoir même longueur et même sens.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont égaux (fig. 2). Mais le segment $\overline{AB}$ n'est pas égal au segment $\overline{DC}$; ce segment $\overline{DC}$ est égal au segment $\overline{BA}$.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont dits *opposés ;* on dira

aussi que $\overline{DC}$ et $\overline{AB}$ sont opposés, puisque $\overline{DC}$ est égal à $\overline{BA}$ ($\overline{AB}$ est aussi égal à $\overline{CD}$).



Fig. 2.

Les équivalents algébriques de deux segments opposés sont deux nombres tels que $+50$ et -50, *égaux en valeur absolue et de signes contraires* (on dit, quelquefois, plus brièvement, mais incorrectement, *égaux et de signes contraires*); nous dirons aussi que ces nombres sont *opposés* [1].

Supposons que notre promeneur fasse 5 pas en avant, et ensuite 2 pas à reculons; il parcourt d'abord (fig. 3) un segment $\overline{AB} = +5$ et ensuite un segment $\overline{BC} = -2$. Il est clair qu'il serait arrivé au même point C en faisant simplement 3 pas en avant, c'est-à-dire en parcourant le segment $\overline{AC} = +3$.

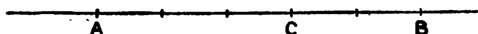


Fig. 3.

Ainsi, parcourir successivement les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ revient à parcourir le segment $\overline{AC}$. Nous exprimerons ce fait en disant que le segment $\overline{AC}$ est *la somme* des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ et nous écrirons :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

On voit là quelle différence sépare la notion de

1. On emploie quelquefois l'expression *symétrique* dans le sens dans lequel nous employons *opposé*; elle nous paraît faire appel à une notion plus compliquée.

segment de la notion de longueur; la longueur AB est de 5 pas, la longueur BC de 2 pas; leur somme est donc de 7 pas; et, de fait, le promeneur qui parcourt successivement ces deux longueurs fait bien 7 pas en tout, et non pas 3. Seulement, comme il en fait 2 à reculons, le point où il arrive est le même que s'il avait fait seulement 3 pas en avant. Lorsqu'on considère les segments au lieu des longueurs, on ne se préoccupe que de ce point final; on ne s'inquiète pas de la fatigue du promeneur, qui aurait pu faire 1003 pas en avant et 1000 à reculons; on désire seulement savoir en quel point il arrive.

La valeur algébrique du segment $\overline{AC}$, à savoir $+3$, est dite la somme des valeurs algébriques des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, c'est-à-dire de 5 et de -2; nous pouvons écrire :

$$5 + (-2) = 3.$$

Nous obtenons ainsi, sur un cas particulier, la règle de l'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif; la formule qui vient d'être écrite signifie ceci : 5 pas en avant suivis de 2 pas à reculons équivalent à 3 pas en avant.

On vérifierait de même que l'on a :

$$\begin{aligned} 5 + 2 &= 7 \\ -5 + 2 &= -3 \\ -5 - 2 &= -7 \end{aligned}$$

formules qui signifient respectivement, dans l'exemple que nous avons choisi : 5 pas en avant suivis de 2 pas en avant équivalent à 7 pas en avant; 5 pas à reculons suivis de 2 pas en avant

équivalent à 3 pas à reculons; 5 pas à reculons suivis de 2 pas à reculons équivalent à 7 pas à reculons. D'où la règle :

Règle. — *Pour obtenir la somme de deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et l'on affecte la somme du signe commun; pour obtenir la somme de deux nombres de signes contraires, on retranche la plus petite valeur absolue de la plus grande et on affecte la différence du signe de la plus grande.*

Exemples. — On a, d'après cette règle :

$$
\begin{aligned}
3+(-4) &= -1\\
125+(-210) &= -85\\
-3250+(-3) &= -3253\\
-1000+2 &= -998\\
-1010+(2000) &= 990\\
134+(-134) &= 0.
\end{aligned}
$$

On voit qu'il résulte de la règle que la somme de deux nombres opposés est toujours égale à zéro; faire un certain nombre de pas en avant, et ensuite le même nombre de pas à reculons, équivaut à ne pas bouger, à ne faire *aucun* pas.

18. **Temps positifs et négatifs**. — On arrive à la même règle si, au lieu de considérer les nombres positifs et négatifs comme représentant des longueurs, on les considère comme représentant des temps, positifs dans l'avenir, négatifs dans le passé. L'intervalle de temps qui sépare deux événements a une valeur absolue, qui dépend de l'unité choisie : année, jour, heure, minute, seconde; si un événement se produit 15 minutes après un autre, on dira que l'intervalle qui les sépare est égal à 15 si l'unité

est la minute, à $\frac{1}{4}$ si l'unité est l'heure, à 900 si l'unité est la seconde. L'unité peut être choisie arbitrairement au début, mais doit bien être précisée et rester la même dans tout le cours d'une même question.

Mais si l'on indique l'ordre dans lequel on considère les deux événements A et B (A étant, par exemple, le moment où ma montre marque midi et B le moment où l'horloge de l'Observatoire marque midi), il sera intéressant de connaître non seulement l'intervalle de temps qui les sépare, mais encore le *sens* de cet intervalle; ou dire que l'intervalle de temps $\overline{AB}$ est $+15$ si l'événement B est postérieur de 15 minutes à l'événement A et qu'il est -15 si l'événement B est antérieur de 15 minutes à l'événement A. (Dans le premier cas, ma montre marque midi *15 minutes plus tôt* que l'horloge de l'Observatoire; *elle avance d'un quart d'heure;* dans le second cas, *elle retarde d'un quart d'heure;* ce n'est pas la même chose.)

Si l'on considère 3 événements A, B, C, *l'intervalle de temps* $\overline{AC}$ *est toujours égal à la somme des intervalles* $\overline{AB}$ *et* $\overline{BC}$; *cette somme étant faite d'après la règle énoncée plus haut.*

Cette remarque est très aisée à vérifier; par exemple, si l'événement B se produit 5 minutes *après* A et si C s'est produit 8 minutes *avant* B, C s'est produit 3 minutes *avant* A. L'on a donc :

$$\overline{AB} = +5 \qquad \overline{BC} = -8 \qquad \overline{AC} = -3,$$

et l'égalité :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

devient :

$$5 + (-8) = -3,$$

ce qui est bien conforme à la règle. On vérifierait de même dans les autres cas; les exercices renferment de nombreux exemples, qu'il est indispensable de traiter, pour bien se pénétrer des règles du calcul *et de leurs rapports avec la réalité.*

19. **Recettes et dépenses.** — Un autre genre de questions usuelles dans lequel s'introduit naturellement la notion de nombres positifs et négatifs nous est fourni par la considération des recettes et dépenses d'une même personne. Paul a 100^{fr}; s'il reçoit 5^{fr} il aura 5^{fr} de plus, soit 105^{fr}; s'il dépense 5^{fr}, il aura 5^{fr} de moins, soit 95^{fr}. Il est donc naturel d'affecter du signe + les recettes et du signe — les dépenses. De cette manière, lorsque Paul recevra 5^{fr}, il inscrira sur son carnet + 5^{fr}; lorsqu'il dépensera 5^{fr}, il incrira — 5^{fr}; il connaîtra la somme qui lui reste *en ajoutant algébriquement tous ces nombres à son avoir primitif.*

Exemple. — *Paul possédait 100^{fr}; il a inscrit les recettes et dépenses suivantes* $+12$, -25, $+7$, -50; *que lui reste-t-il?*

Réponse : la règle donne :

$$100 + 12 + (-25) + 7 + (-50);$$

c'est-à-dire, en effectuant successivement les opérations indiquées : $100 + 12 = 112$; $112 - 25 = 87$; $87 + 7 = 94$; $94 - 50 = 44$. Il reste donc à Paul 44^{fr}.

Autre exemple. — *Paul possédait 100^{fr}; il dépense 125^{fr}, c'est-à-dire inscrit* -125; *que lui reste-t-il?*

L'application de la règle de l'addition nous donne :

$$100 + (-125) = -25.$$

Paul a donc dépensé 25^{fr} de plus qu'il n'avait, il a 25^{fr} de dettes; ce que nous exprimerons plus brièvement en disant que son avoir est —25^{fr}.

AUTRE EXEMPLE. — *Paul possède — 25^{fr}; il reçoit 50^{fr}, que possède-t-il ensuite?*

Réponse : on a :

$$-25 + 50 = 25.$$

Il possède donc 25^{fr}. Il avait 25^{fr} de dettes; avec les 50^{fr} qu'il a reçus, il a pu payer ces 25^{fr} de dettes et il lui reste un avoir de 25^{fr}.

DERNIER EXEMPLE. — *Paul possède — 25^{fr}; il dépense 10^{fr}, c'est-à-dire inscrit — 10; que possède-t-il ensuite?*

Réponse : nous avons :

$$-25 + (-10) = -35.$$

Il possède donc —35^{fr}, c'est-à-dire doit 35^{fr}; il devait 25^{fr} et a encore dépensé 10^{fr}, sa dette est donc devenue 35^{fr}.

Nous avons ainsi vérifié, sur ces divers exemples, que la règle de l'addition des nombres positifs et négatifs donne toujours des résultats corrects, c'est-à-dire conformes à la réalité. Ces nombres ne sont donc pas des abstractions pures; ce sont simplement des manières abrégées de représenter des faits très simples, très élémentaires, et bien connus de tous. Il faut n'y voir aucun mystère, mais simplement la traduction dans le langage de l'Algèbre de remarques évidentes. En se pénétrant de cette

idée, on s'habituera vite à ce langage et l'étude ultérieure de l'Algèbre montrera quels avantages présente son emploi.

20. **Somme de plusieurs nombres.** — Nous avons déjà calculé, dans un exemple, la somme de plusieurs nombres : c'est le résultat que l'on obtient en ajoutant le second au premier, le troisième à la somme ainsi obtenue, le quatrième à cette nouvelle somme, etc.

THÉORÈME I. — *La somme de plusieurs nombres ne change pas lorsqu'on intervertit leur ordre.*

Par exemple, l'on a :

$$12 + (-5) + (-28) + 13 = -5 + 12 + 13 + (-28).$$

En effet, supposons que Paul ait reçu 12^{fr} de Jean et 13^{fr} de Jacques et, d'autre part, ait dépensé 5^{fr} chez le boulanger et 28^{fr} chez le boucher. Il est évident que sa situation finale est la même, quel que soit l'ordre dans lequel il a effectué ces diverses opérations; cette situation est d'ailleurs qu'il a 8^{fr} de dettes, qu'il possède -8^{fr}. En d'autres termes, si je possède 100^{fr}, que je reçoive $23^{fr},50$ et que je dépense $58^{fr},75$, je n'ai aucun avantage à effectuer la dépense avant ou après la recette; je ne puis rien y gagner.

On démontrerait de la même manière les théorèmes suivants, qui sont souvent d'un usage commode.

THÉORÈME II. — *On ne change pas la valeur d'une somme en remplaçant plusieurs de ses parties par leur somme effectuée.*

THÉORÈME III. — *Pour calculer la somme de plusieurs nombres, on peut procéder comme il suit :*

additionner les nombres positifs; additionner les valeurs absolues des nombres négatifs; retrancher la plus petite de ces sommes de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande.

Suivant les cas, il peut être commode d'utiliser le premier ou le second de ces théorèmes.

Soit, par exemple, à calculer la somme :

$$2357 + (-324) + 325 + (-1024) + 1004.$$

On remarquera que l'on a :

$$-324 + 325 = 1$$
$$-1024 + 1004 = -20,$$

de sorte que l'on aura à calculer :

$$2357 + 1 - 20 = 2338.$$

Autre exemple. — Soit à calculer :

$$234 + (-27) + 3 + (-33) + 3 + (-300).$$

On écrira, d'après le théorème III :

$$234 + 3 + 3 = 240,$$
$$27 + 33 + 300 = 360,$$
$$360 - 240 = 120.$$

Le résultat est -120.

21. **Soustraction.** — *La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Retrancher un nombre d'un autre, c'est en trouver un troisième qui, ajouté au premier reproduise le second.*

Par exemple, si l'on retranche 3 de 5 on trouve 2, car $2 + 3 = 5$; si l'on retranche -3 de 5, on trouve 8, car $8 + (-3) = 5$; si l'on retranche 5 de -3 on trouve -8, car $-8 + 5 = -3$.

PRINCIPE. — *Pour retrancher un nombre quelconque, il suffit d'ajouter le nombre opposé.* Pour retrancher 3, il suffit d'ajouter -3; pour retrancher -3, il suffit d'ajouter 3.

Ce principe peut être regardé comme une conséquence des exemples donnés; on peut le démontrer rigoureusement en remarquant que, la somme de deux nombres opposés étant nulle, on a :

$$8 + 3 + (-3) = 8$$
$$8 + (-3) + 3 = 8.$$

Donc, d'après la définition même de la soustraction, $8 + 3$ est la différence de 8 et de -3 et $8 + (-3)$ est la différence de 8 et de 3. La démonstration serait la même si, au lieu de 8, on avait un nombre négatif, tel que -7.

La soustraction se ramène donc à l'addition; soit, par exemple, à effectuer le calcul de l'expression :

$$4 - (-5) + (-7) - (+4) - (-3) + 12.$$

On pourra l'écrire :

$$4 + 5 + (-7) + (-4) + 3 + 12,$$

de manière qu'il n'y ait plus que des additions à effectuer; et l'on appliquera les règles que nous avons données pour l'addition. Les théorèmes démontrés pour le cas d'additions successives s'appliquent aussi dans le cas de soustraction; en particulier, *on ne change pas le résultat final en intervertissant l'ordre des opérations;* on a, par exemple :

$$4 - (-3) + (-5) - (-7) = 4 - (-7) - (-3) + (-5).$$

REMARQUE. — Lorsque l'on désigne les nombres par des lettres, il peut arriver qu'une lettre, telle

que a, désigne un nombre négatif, tel que -3; alors le symbole $-a$ signifiera que l'on doit retrancher -3, c'est-à-dire que l'on doit ajouter 3; il équivaut donc à $+3$. *D'une manière générale,* $-a$ *désigne toujours le nombre opposé au nombre* a. On se trouve amené ainsi parfois à superposer, en quelque sorte, plusieurs signes $-$; il résulte des explications que nous avons données que *deux* signes $-$ peuvent être supprimés (ou remplacés par un signe $+$, ce qui revient au même). Ainsi lorsque a désigne -3, $-a$ désigne $-(-3)$, c'est-à-dire $+3$; si l'on doit retrancher $-a$, cela revient à ajouter a, c'est-à-dire à retrancher 3. Dans ce dernier cas, nous avions *trois* signes $-$; si l'on en supprime *deux*, il en subsiste *un*.

Exemple I. — *Calculer l'expression :*

$$a - b - (-c) + (-d),$$

où l'on suppose :

$$a = 10 \qquad b = -4 \qquad c = 3 \qquad d = -7.$$

On obtient :

$$10 + 4 + 3 + 7 = 24.$$

II. — *Calculer l'expression :*

$$-a - (-b) + (-c) - (-d),$$

où l'on suppose :

$$a = 4 \qquad b = -6 \qquad c = -3 \qquad d = 7.$$

On obtient :

$$-4 - 6 + 3 + 7 = 0.$$

On trouvera d'autres exemples aux exercices.

22. **Problèmes sur l'addition et la soustraction.** — Dans les problèmes sur l'addition et la soustraction, on doit introduire des conventions de signes bien précises, et, une fois ces conventions introduites, s'y conformer avec beaucoup d'attention. Il ne reste plus dès lors qu'à effectuer les opérations suivant les règles que nous avons données et à interpréter le résultat conformément aux conventions faites. Quelques exemples éclairciront ces observations.

PROBLÈME I. — *Au 1er janvier, Pierre devait 50fr à Jean; le 6 Jean a reçu 40fr de Pierre; le 12, Pierre a remis à Jean pour 28fr de marchandises; le 15, Jean a chargé Pierre de payer à sa place 33fr à Paul; le 18, Pierre a emprunté 60fr à Jean; le 22, Jean a reçu 100fr de Pierre. Comment doit se régler leur compte fin janvier?*

Nous regarderons comme *positive* la dette de Pierre envers Jean; donc les sommes que Jean remet à Pierre, augmentant cette dette, sont positives, et les sommes que Pierre remet à Jean, diminuant cette dette, sont négatives; nous pourrons donc résumer l'énoncé de la manière suivante :

Le 1er janvier	50
— 6 —	-40
— 12 —	-28
— 15 —	-33
— 18 —	$+60$
— 22 —	$-100.$

On obtient donc :

$$50-40-28-33+60-100=-91.$$

Le résultat est -91^{fr} ; donc, fin janvier, *Jean doit* 91^{fr} *à Pierre.*

Remarque. — D'habitude, les commerçants emploient, pour résoudre les problèmes de ce genre, la méthode qui résulte du théorème III (p. 40) ; c'est-à-dire qu'ils inscrivent dans deux colonnes différentes les sommes positives, et les sommes négatives, qu'ils appellent respectivement le *Doit* et l'*Avoir*. Il n'y a dès lors qu'à additionner séparément les deux colonnes, et à retrancher le plus petit résultat du plus grand, *en donnant à la différence le signe du plus grand*, c'est-à-dire la signification de la colonne qui l'a fourni.

Problème II. — *Un alpiniste part d'une station dont l'altitude est* 320^{m}*; il monte en chemin de fer de* 50^{m}*, en voiture de* 200^{m}*, à pied de* 2320^{m}*, redescend à pied de* 2240^{m}*, monte en voiture de* 50^{m}*, et redescend en chemin de fer de* 412^{m}*. A quelle altitude est-il finalement?*

Nous considérerons la *montée* comme *positive* et la *descente* comme *négative*. Nous obtenons ainsi :

$$320 + 50 + 200 + 2320 - 2240 + 50 - 412 = 288.$$

L'altitude demandée est 288^{m}.

Problème III. — *Deux voyageurs marchent sur la route de Paris à Lyon ; le premier est plus près de Paris que le second de* 25^{km}*. Le premier fait* 20^{km} *dans la direction de Lyon et le second* 15^{km} *dans la direction de Paris. Quelle est alors la distance qui les sépare?*

Regardons comme sens positif le sens de Paris à Lyon ; et convenons d'appeler distance du premier voyageur au second le chemin, pris avec son

signe, que doit parcourir ce premier voyageur pour rejoindre le second. Cette distance est 25, puisque, pour rejoindre le second voyageur, le premier doit parcourir 25^{km} dans le sens de Paris à Lyon. Lorsque le premier voyageur parcourt un certain chemin, la distance se trouve diminuée de la longueur de ce chemin ; en effet, s'il parcourt $+3$, c'est-à-dire s'il fait 3^{km} dans la direction de Lyon, la distance devient $25-3=22$; si, au contraire, il parcourt -3, c'est-à-dire fait 3^{km} dans la direction de Paris, la distance devient $25-(-3)=28$. Au contraire, le chemin parcouru par le second voyageur *s'ajoute* à la distance ; celle-ci est augmentée lorsque ce chemin est positif et diminuée lorsqu'il est négatif.

Or, d'après l'énoncé, le premier voyageur parcourt $+20$ et le second -15 ; leur distance finale est donc :

$$25-20+(-15)=-10.$$

La réponse est donc la suivante : *la distance demandée est 10^{km}, et, de plus, on sait que le premier voyageur est plus loin de Paris que le second.*

Problème IV. — *Les voyageurs étant situés comme on vient de le dire dans la réponse précédente, le premier fait 12^{km} dans la direction de Paris et le second 3^{km} dans la direction de Lyon ; quelle est alors leur situation ?*

En conservant les mêmes conventions de signe que dans le problème précédent, on voit que leur distance est d'abord -10, que le premier parcourt -12 et le second $+3$; leur distance devient donc :

$$-10-(-12)+3=5.$$

La distance finale est donc 5^{km} *et c'est maintenant le premier voyageur qui est le plus rapproché de Paris.*

23. — On trouvera d'autres problèmes aux exercices; il importe de les traiter tous, d'une part par l'algèbre, d'autre part en faisant appel au bon sens. On constatera, non seulement que les résultats obtenus sont les mêmes, mais *que les opérations même à effectuer sont absolument identiques*. L'élève acquerra ainsi une confiance de plus en plus grande dans l'instrument algébrique dont il apprend à se servir; il importe, en effet, que cette confiance soit le résultat de l'expérience personnelle, en même temps que des démonstrations données par le livre ou par le professeur. D'ailleurs, le débutant ne devra pas s'étonner si la solution par l'algèbre est pour lui, dans ces problèmes simples, plus longue et plus difficile que la solution qu'indique le bon sens; il est nécessaire de commencer par étudier les exemples où il en est ainsi; ensuite, on résoudra par l'algèbre des problèmes plus difficiles, pour lesquels le raisonnement direct serait plus compliqué; mais, avant de supprimer ce raisonnement direct, il importe que chaque élève s'assure par lui-même qu'il est tout à fait équivalent aux formules et aux signes algébriques par lesquels on le remplace.

III. MULTIPLICATION ET DIVISION DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS.

24. Définition. — *On appelle produit de deux nombres positifs ou négatifs, un nombre dont la*

valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des facteurs et qui, de plus, est positif dans le cas où ces facteurs sont de même signe, négatif dans le cas où ces facteurs sont de signes contraires.

D'après la définition, l'on a :

$$3 \times 5 = 15$$
$$3 \times (-5) = -15$$
$$-3 \times 5 = -15$$
$$-3 \times (-5) = 15$$

25. **Produit de plusieurs facteurs.** — Le produit de plusieurs facteurs est, par définition, le résultat final que l'on obtient lorsque l'on multiplie le premier par le second, le produit obtenu par le troisième, le produit obtenu par le quatrième, etc.

Ainsi soit le produit :

$$-2 \times 4 \times (-5) \times 6 \times (-3) \times 2.$$

L'on a, d'après la définition :

$$-2 \times 4 = -8; \quad -8 \times (-5) = 40; \quad 40 \times 6 = 240;$$
$$240 \times (-3) = -720; \quad -720 \times 2 = -1440;$$

le produit considéré a donc pour valeur -1440.

Signe du produit de plusieurs facteurs. — Lorsqu'on effectue le produit de plusieurs facteurs d'après la règle précédente, on voit que chaque facteur négatif entraîne un changement de signe, tandis que chaque facteur positif n'en entraîne pas. On en conclut que *le signe du produit ne dépend que du nombre des facteurs négatifs;* si ce

nombre est pair ou nul, le produit est positif, si ce nombre est impair, le produit est négatif.

Théorème. — *La valeur d'un produit de plusieurs facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.* Pour démontrer que la valeur du produit ne change pas, il suffit de faire voir que *la valeur absolue* reste la même et que le signe reste aussi le même. Or, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; d'après un théorème d'arithmétique, elle ne dépend pas de leur ordre. Quant au signe, il ne dépend que du nombre des facteurs négatifs; le théorème est donc démontré.

26. **Théorème.** — *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier les parties de la somme par ce nombre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Nous nous bornerons à vérifier l'exactitude de ce théorème sur des exemples.

Soit :

$$[2 + (-3) + (-4) + 17] \times 10.$$

On a :

$$2 \times 10 = 20, \quad (-3) \times 10 = -30, \quad (-4) \times 10 = -40,$$
$$17 \times 10 = 170.$$
$$2 + (-3) + (-4) + 17 = 12,$$
$$20 + (-30) + (-40) + 170 = 120,$$

et l'on a bien :

$$12 \times 10 = 120.$$

Autre exemple. — Soit :

$$[2 + (-5) + (-7) + 4] \times (-10).$$

L'on a :

$$2 \times (-10) = -20, \quad (-5) \times (-10) = 50,$$
$$(-7) \times (-10) = 70, \quad 4 \times (-10) = -40.$$
$$2 + (-5) + (-7) + 4 = -6.$$
$$-20 + 50 + 70 - 40 = 60,$$

et l'on a bien :

$$(-6) \times (-10) = 60.$$

On obtient donc le même résultat, soit en effectuant la somme d'abord et la multiplication ensuite, soit en multipliant d'abord les diverses parties de la somme et ajoutant ensuite entre eux les résultats obtenus[1].

On exprime la propriété qui résulte de l'énoncé de ce théorème en disant que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

La soustraction se ramenant à l'addition, la multiplication est aussi distributive par rapport à la soustraction; en désignant par a, b, c, d, m, des nombres positifs ou négatifs, on a :

$$(a - b - c + d)m = am - bm - cm + dm.$$

---

1. Pour démontrer rigoureusement ce théorème, il suffit d'examiner avec soin toutes les combinaisons de signes possibles, dans le cas où la somme n'a que deux parties, et d'appliquer chaque fois les théorèmes d'arithmétique sur le produit d'une somme ou d'une différence par un nombre, en ayant soin, dans le cas de la différence, de changer tous les signes, si c'est nécessaire, pour que la différence soit positive. Nous supprimons cette démonstration, l'examen attentif des exemples donnés devant suffire aux commençants pour les convaincre de l'exactitude du théorème. Nous nous contenterons aussi d'indiquer l'intérêt que présenterait la méthode inverse, qui consisterait à admettre que ce théorème est exact en algèbre, comme en arithmétique, et *à en déduire les règles de multiplication des nombres positifs et négatifs que nous avons énoncées à priori.*

La règle de la multiplication, comme celles de l'addition et de la soustraction, doit être justifiée par des exemples concrets; il est nécessaire de faire voir que cette règle permet d'obtenir la solution exacte des problèmes dans lesquels on l'utilise. C'est ce que nous montrerons en détail dans le chapitre suivant; mais il nous a paru nécessaire[1] de commencer par formuler les règles avec lesquelles il est essentiel de se familiariser le plus vite possible; leur justification ne tardera pas.

27. **Division**. — La division est l'opération inverse de la multiplication. Diviser un nombre par un autre, c'est en trouver un troisième dont le produit par le second soit égal au premier.

Par exemple :

$$12 : (-4) = -3 \quad \text{car} \quad (-3) \times (-4) = 12.$$

La règle de la division est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

Règle. — *Le quotient de deux nombres a pour valeur absolue le quotient de leurs valeurs absolues et, de plus, est positif ou négatif suivant que ces deux nombres sont de même signe ou de signes contraires.*

Exemples :

$$(-12) : (-4) = 3$$
$$(-30) : \quad 6 = -5$$
$$30 : (-6) = -5.$$

28. **Fractions algébriques**. — On appelle quelquefois fraction algébrique[2] le quotient indiqué de deux nombres positifs ou négatifs.

---

1. Et d'ailleurs conforme au programme.
2. Nous adoptons cette expression parce qu'elle figure au programme.

Par exemple, voici des fractions algébriques :

$$\frac{-3}{4}, \quad \frac{-6}{-5}, \quad \frac{7,2}{-4}.$$

Les valeurs de ces fractions sont, d'après la règle de la division :

$$-\frac{3}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad -\frac{7,2}{4}.$$

On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre.

On a, par exemple :

$$\frac{-6}{5} = \frac{12}{-10}.$$

Les deux termes ont été multipliés par -2 ; on a, de même :

$$\frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}.$$

Les deux termes ont été divisés par -2.

De la proposition précédente on conclut qu'il est possible de réduire plusieurs fractions au même dénominateur par la même règle qu'en arithmétique. Il en résulte que pour étudier l'addition ou la soustraction des fractions, on peut se borner aux fractions qui ont même dénominateur.

RÈGLE. — *Pour ajouter ou retrancher plusieurs fractions ayant un même dénominateur, il suffit d'ajouter ou retrancher les numérateurs et de donner au résultat le dénominateur commun.*

Ainsi, a, b, c, d, m, étant des nombres positifs

ou négatifs, on a :

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a-b-c+d}{m}.$$

DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE. — Pour démontrer cette règle, il nous suffit de multiplier par m les deux membres de l'égalité précédente. S'ils sont égaux, ils resteront égaux; s'ils sont inégaux, ils resteront inégaux; c'est une conséquence de la règle de la multiplication. Nous avons donc à démontrer l'égalité

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}\right)m=\left(\frac{a-b-c+d}{m}\right)m.$$

Il suffit d'appliquer la règle relative à la multiplication d'une somme ou différence par un nombre m; on obtient :

$$a-b-c+d=a-b-c+d$$

ce qui est exact.

29. **Multiplication des fractions.** RÈGLE. — *Le produit de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

EXEMPLES :

$$\frac{3}{-4}\times\frac{5}{-6}=\frac{15}{24},$$

$$\frac{3}{-4}\times\frac{-5}{6}=\frac{-15}{-24},$$

$$\frac{3}{-4}\times\frac{-5}{-6}=\frac{-15}{24}.$$

DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE. — D'après la définition de la multiplication, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des

facteurs; il en est bien ainsi lorsqu'on suit la règle indiquée. Il suffit donc de montrer que le signe obtenu est le bon; c'est ce que l'on vérifie en examinant successivement tous les cas possibles; par exemple, dans le premier exemple donné, les deux facteurs sont négatifs et le produit est positif, ce qui doit être, etc.

Division des fractions. Règle. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Exemples :

$$\frac{3}{4} : \frac{-5}{-6} = \frac{3}{4} \times \frac{-6}{-5} = \frac{-18}{-20},$$

$$\frac{3}{-4} : \frac{5}{-6} = \frac{3}{-4} \times \frac{-6}{5} = \frac{-18}{20},$$

$$\frac{-3}{-4} : \frac{5}{-6} = \frac{-3}{-4} \times \frac{-6}{5} = \frac{18}{-20}.$$

Justification de la règle. — La règle se justifie comme celle de la multiplication.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

27. — Sur la ligne de Paris, Lyon, Marseille, les villes suivantes, situées entre Lyon et Marseille sont : Vienne, à 31^{km} de Lyon ; Valence à 106^{km} de Lyon Montélimar à 150^{km} de Lyon ; Avignon à 230^{km} de Lyon ; et les villes suivantes, situées entre Lyon et Paris sont : Mâcon, à 72^{km} de Lyon, Chalon-sur-Saône à 129^{km} de Lyon, Dijon à 197^{km} de Lyon. Quelle distance y a-t-il de Valence à Mâcon ? de Chalon à Dijon ? de Montélimar à Dijon ? d'Avignon à Vienne ? de Vienne à Chalon ?

28. — Jean est plus âgé de 3 mois 6 jours que Jacques et plus jeune de 6 mois 5 jours que Pierre. Quelle différence d'âge y a-t-il entre Pierre et Jacques ?

29. — On considère 4 points A, B, C, D sur un axe; l'unité de longueur étant le centimètre, le segment $\overline{AB}$ est égal à $+7$, le segment $\overline{BC}$ à -4, le segment $\overline{CD}$ à $+13$; calculer les segments $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$. Faire la figure.

30. — On donne 4 points A, B, C, D sur un axe; l'unité de longueur étant le millimètre, le segment $\overline{BA}$ est égal à $+8$, le segment $\overline{BC}$ est égal à -18 et le segment $\overline{AD}$ est égal à $+35$; calculer les segments $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$. Faire la figure.

31. — Dans une course de bicyclistes, Pierre est arrivé $2^m\,13^s$ après Jean et $15^m\,56^s$ avant Jacques. Quel intervalle de temps sépare l'arrivée de Jean de l'arrivée de Jacques?

32. — La montre de Pierre retarde de 3^m sur l'horloge de la ville, laquelle avance de 8^m sur l'heure du chemin de fer. Comment va la montre de Pierre par rapport à l'heure du chemin de fer?

33. — Effectuer les opérations suivantes :

$$4-(-5)+7$$
$$3-6+2-12$$
$$-5-3-(-15)+(-2).$$

34. — Effectuer les opérations suivantes :

$$3+4-5-2-7+8-4$$
$$3+2-5-7-9+14$$
$$3-(2-5)-(6-3-9)+(3-6-4)$$
$$3-5-2-(3-9-4+12).$$

35. — Effectuer les opérations suivantes :

$$3{,}125-4{,}375+2{,}5$$
$$3{,}15-(3{,}5-8{,}135-4{,}5+3)+(-3{,}35)$$
$$4{,}15-(-8{,}75-3-2{,}5)+(-3+4{,}52).$$

36. — Un commerçant constate qu'il doit à diverses personnes les sommes suivantes : $323^{fr},50$; $312^{fr},35$; $402^{fr},75$; d'autre part diverses personnes lui doivent 300^{fr}; 250^{fr}; $417^{fr},45$; il a actuellement en caisse 1000^{fr}; combien aura-t-il, après ses comptes tous réglés?

37. — Un commerçant doit à diverses personnes 3 640^{fr}, 2 350^{fr}, 4 500^{fr}; diverses personnes lui doivent 2 000^{fr}, 3 000^{fr} et 1 500^{fr}; il a en caisse 492^{fr},75. Quelle est sa situation?

38. — Effectuer les opérations suivantes :

$$32 \times (-15)$$
$$4 \times (-5) \times 2 \times (-3) \times (-6)$$
$$2{,}5 \times (-3{,}4) \times (-1{,}2)$$
$$-15 \times (-3{,}4) \times (-1).$$

39. — Effectuer les opérations suivantes :

$$(3-4-5)\,6 + (2-6+7) \times (-9)$$
$$(3-4-5) \times (-2) + (6-8) \times (-12).$$

40. — Un commerçant possède 10 000^{fr}; il doit payer 145 objets à 18^{fr} et recevoir le prix de 112 objets à 16^{fr}; quelle sera ensuite sa situation?

41. — Effectuer les divisions suivantes :

$$4 : (-3)$$
$$42{,}5 : (-3{,}4)$$
$$-3{,}5 : 0{,}7$$
$$-4{,}5 : (-0{,}9)$$
$$-3 : (-1).$$

42. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$\frac{-3}{4} \times \frac{5}{6},$$
$$\frac{-5}{7} \times \frac{-4}{2},$$
$$\frac{-6}{4} \times \frac{-3}{2} \times \frac{7}{-8} \times \frac{6}{-4} \times \frac{-3}{-2}.$$

43. — Effectuer les divisions suivantes :

$$\frac{3}{4} : \frac{-5}{6}$$
$$\frac{3}{4} : \frac{-2}{-5}$$
$$\frac{-2}{3} : \frac{-3}{5}$$

44. — Effectuer les opérations suivantes :

$$\left(2+\frac{-3}{4}-5\right):\frac{-2}{3}+(3+5)\times\frac{-3}{4}$$

$$\left[\left(3-5+\frac{1}{2}\right):\frac{-3}{-4}+\left(-3-\frac{2}{3}-4\right)\times\frac{-2}{3}\right]\times\frac{-1}{2}.$$

45. — Calculer la valeur de l'expression :

$$a\,(b'c''-c'b'')+a'\,(b''c-c''b)+a''\,(bc'-cb')$$

lorsque l'on suppose :

$$\begin{array}{lll} a=1 & a'=-1 & a''=1 \\ b=1 & b'=2 & b''=4 \\ c=1 & c'=-\frac{1}{2} & c''=\frac{1}{4} \end{array}$$

46. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

où l'on suppose :

$$\begin{array}{lll} a=\frac{1}{2} & b=-\frac{1}{4} & c=1 \\ a'=-\frac{2}{3} & b'=3 & c'=-1 \end{array}$$

47. — Faire l'exercice 21 en supposant :

$$u_0=-1 \qquad u_1=-2.$$

48. — Faire l'exercice 19 en supposant :

$$u_0=-\frac{1}{2} \qquad u_1=1.$$

49. — Faire l'exercice 20 en supposant :

$$u_0=-1 \qquad u_1=1$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS. MOUVEMENT UNIFORME.

I. DÉTERMINATION D'UN POINT SUR UN AXE ET D'UN ÉVÉNEMENT DANS LE TEMPS.

30. **Détermination d'un point sur un axe.** — Nous avons déjà dit que l'on appelle *axe* une droite sur laquelle on a fixé un sens positif, le sens opposé étant dès lors appelé sens négatif. Étant donné un axe, si l'on connaît la position d'un point A sur cet axe, pour connaître la position d'un autre point B, il suffit de connaître la valeur du segment $\overline{AB}$ (et l'unité de longueur). Connaissant les points A et B, pour connaître la position d'un point C, il suffit de connaître ou $\overline{AC}$, ou $\overline{BC}$, etc.

Par exemple, sur la figure 4, on a déterminé B, C, D en supposant le point A connu, ainsi que les segments suivants :

$$\overline{AB} = 5 \qquad \overline{BC} = 3 \qquad \overline{CD} = -5.$$

Mais cette manière de procéder présente un inconvénient; il est nécessaire de faire un calcul

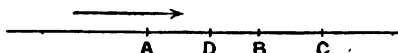


Fig. 4.

pour connaître la position respective des points A et D; *il faut passer par tous les intermédiaires.* Il est plus commode, pour fixer la position d'un point sur un axe, de donner sa distance à un point fixe, toujours le même, qu'on appelle *origine des abscisses* et que l'on désigne généralement par la lettre O; par définition, la distance du point A au point O est la valeur algébrique du segment $\overline{OA}$; on dit que c'est l'abscisse du point A.

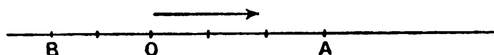


Fig. 5.

Ainsi sur la figure 5, l'abscisse du point A est 3; l'abscisse du point B est — 2, comme on le voit de suite, grâce aux traits équidistants qui y sont figurés. En résumé :

DÉFINITION. — *Étant donnés un axe, un point fixe* O *sur cet axe, et une unité de longueur, l'abscisse d'un point* A *de l'axe est la valeur algébrique du segment* $\overline{OA}$.

31. **Variations de l'abscisse.** — Lorsque le point A se déplace sur l'axe, son abscisse varie; à chaque position du point correspond une valeur et une seule de l'abscisse, et réciproquement à tout nombre positif ou négatif correspond un point et un seul dont l'abscisse est égale à ce nombre.

Étudions les variations de l'abscisse lorsque le point A partant d'un point très éloigné dans la direction négative, se déplace constamment dans le sens positif, occupant successivement les positions A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (fig. 6). L'abscisse du point A_1 est égale au segment $\overline{OA_1}$; c'est un nombre négatif dont la valeur absolue est la longueur OA_1 ; cette valeur absolue est d'autant plus grande que A_1 est plus

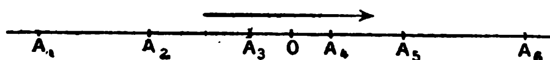


Fig. 6.

éloigné du point O. Lorsque le point vient en A_2, puis en A_3, l'abscisse reste négative, mais sa valeur absolue devient de plus en plus petite; elle devient nulle lorque le point A se confond avec le point O. Si le point A continue à se déplacer dans le même sens, l'abscisse devient positive, d'abord très petite, puis de plus en plus grande (positions A_4, A_5, A_6).

On convient de dire qu'un nombre a est supérieur à un nombre b, ou plus grand que b, lorsque la différence a — b est positive; et l'on exprime ce fait en écrivant :

$$a > b$$

ou

$$a - b > 0.$$

Par exemple on a :

$$7 > 4$$

car $7 - 4 = 3$ est un nombre positif. On a, de même :

$$7 > -4$$

car $7-(-4)=11$ est un nombre positif. On a enfin :

$$-4>-7$$

car $-4-(-7)=-4+7=3$ est un nombre positif.

La définition que nous avons donnée coïncide donc avec la définition arithmétique lorsque a et b sont tous deux positifs ; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on en déduit la règle suivante.

Règle. — *Lorsque a est positif et b négatif, on a toujours :*

$$a>b,$$

lorsque a et b sont tous deux négatifs, on a :

$$a>b,$$

dans le cas et dans le cas seulement où la valeur absolue de a est inférieure à la valeur absolue de b.

La représentation d'un nombre par le point dont l'abscisse est égale à ce nombre fournit une image simple qui explique et légitime ces définitions. Désignons par A le point dont l'abscisse est a et par B le point dont l'abscisse est b ; on vérifie sans peine (fig. 7) que si l'on a l'inégalité

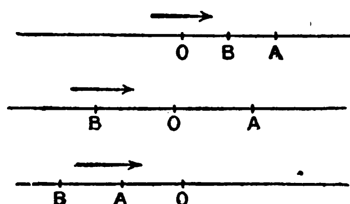


Fig. 7.

$$a>b$$

il en résulte que A est, sur notre figure, à droite de B, c'est-à-dire est, par rapport à B, dans la

direction positive (puisque nous avons choisi comme sens positif le sens de gauche à droite). Nous avons fait la figure dans les trois cas différents qui peuvent représenter : a et b positifs ; a positif et b négatif ; a et b négatifs.

En tenant compte de cette définition on peut résumer comme il suit ce que nous avons dit sur la variation de l'abscisse.

Règle. — *Lorsque le point* A *se déplace dans le sens positif, son abscisse va constamment en croissant, c'est-à-dire prend des valeurs de plus en plus grandes.*

Sur la fig. 6, on a, par exemple :

$$\overline{OA_6} > \overline{OA_5} > \overline{OA_4} > \overline{OA_3} > \overline{OA_2} > \overline{OA_1}$$

Remarque. — Le nombre *zéro* est supérieur à tous les nombres négatifs ; géométriquement, le point origine O est à droite de tous les points d'abscisse négative (lorsque le sens positif est le sens de gauche à droite).

32. **Distance de deux points.** — Problème : *Étant données les abscisses de deux points, calculer leur distance.*

Soient A et B les deux points donnés ; désignons par a et b leurs abscisses, c'est-à-dire posons :

$$\overline{OA} = a; \qquad \overline{OB} = b.$$

Nous voulons calculer le segment $\overline{AB}$; il résulte de principes établis dans le précédent chapitre que l'on a :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$$

ce qui signifie, rappelons-le : *aller de* A *en* B *équivaut à aller d'abord de* A *en* O, *et puis de* O *en* B.

On a d'ailleurs :

$$\overline{AO} = -\overline{OA} = -a$$
$$\overline{OB} = b.$$

Il en résulte donc :

$$\overline{AB} = -a + b = b - a.$$

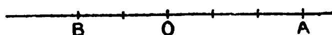
Telle est la formule qui donne la distance de deux points; on peut la traduire en langage ordinaire comme il suit :

Règle. — *La distance de deux points* A *et* B *situés sur un axe est égale à l'abscisse du second* B *diminuée de l'abscisse du premier* A.

Il ne faut pas perdre de vue que la distance $\overline{AB}$ ainsi définie est positive ou négative suivant que la direction de A vers B est elle-même positive ou négative.

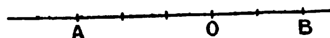
Bien que cette règle, ayant été démontrée, n'ait pas besoin de vérification, cette vérification sur des exemples n'en est pas moins profitable au commençant.

Exemple I.



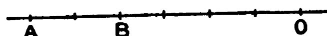
$$\overline{OA} = a = 3; \qquad \overline{OB} = b = -2.$$
$$\overline{AB} = -2 - 3 = -5.$$

Exemple II.



$$\overline{OA} = a = -3; \qquad \overline{OB} = b = 2.$$
$$\overline{AB} = 2 - (-3) = 5.$$

EXEMPLE III.



$$\overline{OA} = a = -6; \qquad \overline{OB} = b = -4.$$
$$\overline{AB} = -4 - (-6) = 2.$$

EXEMPLE IV.

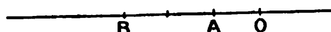


Fig. 8.

$$\overline{AO} = a = -1; \qquad \overline{OB} = b = -3.$$
$$\overline{AB} = -3 - (-1) = -2.$$

33. **Détermination d'un événement dans le temps.** — Pour déterminer la position d'un événement dans le temps, on choisit une époque bien déterminée, que l'on appelle *origine des temps* et une *unité de temps*. La date de chaque événement est alors représentée par un nombre positif si l'événement est postérieur à l'origine des temps, négatif s'il est antérieur [1], et dont la valeur absolue est égale à la mesure de l'intervalle de temps qui sépare cet événement de l'origine.

Prenons, par exemple, comme origine des temps, *le 12 janvier 1903, à midi*, et comme unité *l'heure*. Si divers événements se produisent le 12 janvier à 11 heures du soir, le 13 à 8 heures du matin, le 11 à 9 heures du soir, le 12 à 8 heures du matin, leurs *époques* seront respectivement égales à $+11$, $+20$, -15, -4.

1. Il est clair que l'on pourrait théoriquement faire une convention de signe opposée; celle que nous indiquons est généralement adoptée.

34. **Intervalle qui sépare deux événements.** — Lorsque l'on connaît les époques de deux événements A et B, l'intervalle de temps qui les sépare est égal à l'époque de B, diminuée de l'époque de A. L'intervalle ainsi obtenu est positif si A est antérieur à B, et négatif si A est postérieur à B; on peut le désigner par $\widehat{AB}$.

Par exemple, l'intervalle qui sépare les deux événements dont les époques sont -15 et $+20$ est $20-(-15)=35$; il s'est écoulé, en effet, 35 heures entre le 11 janvier à 9 heures du soir et le 13 à 8 heures du matin.

Remarque sur la chronologie. — L'origine du temps communément adoptée pour la chronologie, dans les pays chrétiens, est l'époque de la naissance de Jésus-Christ; c'est-à-dire que l'on suppose qu'il est né le 1er janvier de l'an I, à minuit[1]; c'est cette date qui doit être désignée par *zéro*. Un événement qui se produit au milieu de l'an 1 aura, si l'on prend l'année comme unité, son époque désignée par $\frac{1}{2}$ ou 0,5; un événement qui s'est produit au milieu de l'an 10 aura son époque désignée par 9,5. Il ne faut pas voir là une contradiction; l'origine des temps étant le moment de la naissance de J.-C., l'époque 9,5 ou $9\frac{1}{2}$ est celle où il a 9 ans et demi; il est dans *sa dixième année*, que l'on appelle l'an 10; c'est ainsi que, en 1903, nous sommes dans le XXe siècle, bien qu'il ne se soit écoulé que 19 siècles et une petite fraction de siècle, depuis le commencement de l'ère chrétienne.

Quant aux années antérieures à la naissance de J.-C., les

1. Nous laissons de côté les petites difficultés qui résultent de l'emploi successif des calendriers julien et grégorien, et des années bissextiles; nous supposons toutes les années égales, pour simplifier.

chronologistes les désignent par l'an 1 av. J.-C., 2 av. J.-C., etc.; aucune année n'est désignée par zéro. Un événement qui se produit le 1er octobre de l'an 1 avant J.-C., c'est-à-dire 3 mois avant la naissance de J.-C., aura son époque désignée par $-\frac{1}{4}$, un événement qui se produit le 1er mai de l'an 34 av. J.-C., c'est-à-dire 33 ans et 7 mois avant la naissance de J.-C., aura son époque désignée par $-33\frac{7}{12}$, l'année étant toujours choisie comme unité. Il est dès lors très aisé de calculer l'intervalle de temps qui sépare deux événements.

EXEMPLE. — *Un homme est né le 1er mai de l'an 12 av. J.-C. et mort le 1er septembre de l'an 45 ap. J.-C. Combien de temps a-t-il vécu?*

En choisissant l'année comme unité, l'époque de sa naissance est $-11\frac{7}{12}$ et l'époque de sa mort $44\frac{8}{12}$; il a donc vécu :

$$44\frac{8}{12}-\left(-11\frac{7}{12}\right)=44\frac{8}{12}+11\frac{7}{12}=55\frac{15}{12}=56\frac{3}{12}.$$

La réponse est : 56 ans 3 mois.

II. CHANGEMENTS D'ORIGINE

35. **Changement de l'origine des abscisses.** — Il arrive fréquemment qu'il est nécessaire de changer l'origine des abscisses, c'est-à-dire, connaissant les abscisses de divers points d'un axe, l'origine étant O, de calculer les abscisses de ces mêmes points, l'origine étant un autre point O′ de l'axe.

Il est évidemment nécessaire pour cela de connaître la position de O′ par rapport à O; on doit donc supposer connue la mesure du segment $\overline{OO'}$, c'est-à-dire *l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.*

Il suffit alors d'appliquer la formule :

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A},$$

On en déduit :

$$\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OO'},$$

c'est-à-dire que l'on a la règle suivante :

RÈGLE. — *L'abscisse d'un point A, par rapport à la nouvelle origine, est égale à l'abscisse de A par rapport à l'ancienne origine, diminuée de l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.*

Si l'on désigne par a l'abscisse de A par rapport à O, par a' l'abscisse de A par rapport à O' et par d l'abscisse de O' par rapport à O, on a la formule fondamentale :

$$a' = a - d,$$

qu'il faut aussi connaître sous la forme équivalente :

$$a = a' + d.$$

36. **Changement de l'origine des temps.** — Il est aussi très important de savoir changer l'origine des temps ; la règle est évidemment la même ; nous nous contenterons de l'énoncer.

RÈGLE. — *L'époque d'un événement par rapport à la nouvelle origine, est égale à son époque par rapport à l'ancienne, diminuée de l'époque de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.*

EXEMPLE. — Prenons comme origine des temps le moment où la montre de Paul marque midi et comme unité la minute ; lorsque Paul est sorti, sa montre marquait midi 23^{m} ; l'époque était donc 23. Nous allons rechercher quelle heure marquait à ce

moment la montre de Jacques ; nous voulons donc prendre comme nouvelle origine le moment où la montre de Jacques marquait midi ; si, à ce moment, la montre de Paul marque midi 11^m, *l'époque de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne est* $+11$; donc l'époque à laquelle Paul est sorti, par rapport à la nouvelle origine, est $23 - 11 = 12$; la montre de Jacques marquait donc midi 12^m.

Autre exemple. — *Dans les mêmes hypothèses, déterminer quelle heure marquait la montre de Paul lorsque celle de Jacques marque midi* 3^m. Dans ce nouvel exemple, l'origine primitive est le midi de la montre de Jacques et la nouvelle origine le midi de la montre de Paul ; l'époque de cette nouvelle origine par rapport à l'ancienne est donc -11 ; on obtient donc $3 - (-11) = 14$; la réponse est donc $+14$, c'est-à-dire que la montre de Paul marque midi 14^m.

III. ÉQUATION DU MOUVEMENT UNIFORME

37. **Définition du mouvement uniforme.** — Considérons un point A qui se déplace sur un axe ; on dit que le mouvement du point A est uniforme lorsque les espaces qu'il parcourt dans des temps égaux sont toujours égaux, quels que soient ces temps égaux. Ainsi l'espace parcouru pendant une heure est toujours le même, l'espace parcouru pendant une minute est toujours le même, l'espace parcouru pendant une seconde est toujours le même.

Dans cette définition, il ne faut pas perdre de vue que le point A se déplace sur *un axe*, c'est-à-dire que des espaces ne sont considérés comme

égaux que s'ils sont *égaux en valeur absolue et de même signe.*

Un promeneur qui marche d'un pas égal sur une route se déplace à peu près d'un mouvement uniforme, *s'il se dirige toujours dans le même sens;* il n'en est pas de même s'il se promène de long en large dans un corridor.

On appelle *vitesse* d'un mouvement uniforme l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

Pour déterminer la vitesse il est donc nécessaire de connaître : 1° le mouvement; 2° le sens choisi comme sens positif; 3° l'unité de longueur; 4° l'unité de temps.

Il résulte de la définition de la vitesse que c'est un nombre positif ou négatif suivant que le mobile se déplace dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Lorsque l'on donne la vitesse d'un mobile, on fait souvent connaître les unités de longueur et de temps : on dit par exemple que la vitesse d'un automobile est de 30^{km} à l'heure. On pourrait dire aussi : la vitesse est 30, les unités choisies étant le kilomètre et l'heure; il reviendrait au même de dire : la vitesse est 500, les unités choisies étant le mètre et la minute; ou la vitesse est $833\frac{1}{3}$, les unités étant le centimètre et la seconde; car parcourir 30^{km} en une heure revient à parcourir 500 mètres en une minute, et à parcourir 833 centimètres $\frac{1}{3}$ en une seconde.

Nous n'insisterons pas sur la théorie de ces *changements d'unité;* il est bon de se familiariser d'abord

avec leur pratique usuelle. Contentons-nous de savoir que les unités de temps et de longueur doivent toujours avoir été fixées d'une manière précise et bien connue.

38. **Équation du mouvement uniforme.** — Proposons-nous de déterminer quel est l'espace e parcouru pendant un temps t, la vitesse étant v. Si t est un nombre entier, par exemple 12, on pourra raisonner comme il suit : pendant le temps 1, l'espace parcouru est, par définition, égal à v; l'espace parcouru pendant le temps 12 est égal à l'espace parcouru pendant 12 intervalles de temps égaux à 1 ; on a donc :

$$e = 12\,v$$

ou, plus généralement :

$$e = vt.$$

L'espace est égal au produit de la vitesse par le temps. Telle est la formule du mouvement uniforme, qu'on appelle aussi *l'équation du mouvement uniforme.*

Nous avons démontré cette équation en supposant que t soit un nombre entier; si t est une fraction, telle que $\frac{13}{7}$, on remarquera que les espaces parcourus pendant des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{7}$ sont égaux, d'après la définition du mouvement uniforme; dans 7 de ces intervalles de temps, c'est-à-dire pendant l'unité de temps, l'espace est égal à v d'après la définition de la vitesse; l'espace est donc égal à $\frac{v}{7}$ dans chacun de ces intervalles et à

13 fois $\frac{v}{7}$ pendant 13 de ces intervalles, égaux chacun à $\frac{1}{7}$. L'espace parcouru pendant le temps $t = \frac{13}{7}$ est donc $\frac{13v}{7}$, ce qui est d'accord avec la formule :

$$e = vt.$$

Dans cette démonstration, nous avons supposé t positif; il en résulte que e a le même signe que v, ce qui est d'accord avec la remarque que nous avons faite sur le signe de la vitesse. Si la vitesse est positive, l'espace est positif, le mobile s'est déplacé dans le sens positif, a parcouru un segment positif; c'est le contraire si la vitesse est négative.

Supposons maintenant que t soit négatif. Que doit-on entendre par l'*espace parcouru en un temps négatif?* A l'époque actuelle le mobile est en A; à l'époque -3, c'est-à-dire il y a 3 secondes, si la seconde est l'unité de temps, il était en B; *nous disons que le segment* $\overline{AB}$ *est l'espace qui correspond au temps* -3; c'est le segment qu'il faut parcourir, pour, de la position actuelle, aller à la position occupée à l'époque -3; de même que l'espace parcouru pendant le temps $+3$ est le segment qu'il faut parcourir pour, de la position actuelle, aller à la position occupée à l'époque $+3$.

Quelle est la valeur algébrique du segment $\overline{AB}$? Elle est opposée à celle du segment $\overline{BA}$; or ce segment $\overline{BA}$, parcouru pendant le temps 3, est égal à $3v$; on a donc :

$$\overline{AB} = -3v,$$

c'est-à-dire, dans ce cas encore :

$$e = vt.$$

On peut remarquer que, t étant négatif, si la vitesse est positive, $\overline{AB}$ est un segment négatif, puisque le sens du mouvement est le sens de B vers A ; si, au contraire, la vitesse est négative, $\overline{AB}$ est un segment positif.

On se rend ainsi compte des raisons concrètes des règles de la multiplication des nombres positifs et négatifs; la généralité de l'équation du mouvement uniforme justifie ces règles, et, à défaut d'autres raisons, l'étude des problèmes sur le mouvement uniforme aurait suffi pour conduire à les imaginer.

Exemple. — *Un train se déplace sur la ligne de Paris à Lille, supposée rectiligne, avec une vitesse de 120^{km} à l'heure, dans le sens de Lille vers Paris; à midi 12^{m}, il est à 30^{km} de Paris; où était-il à midi 3^{m}?*

Prenons comme sens positif le sens de Paris à Lille, comme unité de longueur le kilomètre, et comme unité de temps la minute. La vitesse est alors -2, car 120^{km} à l'heure correspondent à 2^{km} par minute, et le mouvement a lieu dans le sens négatif. Nous connaissons la position A du train à midi 12^{m} et nous voulons connaître sa position B à midi 3^{m}; le segment $\overline{AB}$ est donc le segment parcouru pendant le temps -9; on a donc, d'après la formule générale :

$$\overline{AB} = -9 \times (-2) = 18.$$

La distance de A à Paris étant 30, celle de B est $30 + 18 = 48$. La réponse est donc : *à 48^{km} de Paris.*

On traitera aisément cette même question par le raisonnement direct; il y a grande utilité pour l'élève à le faire et à comparer la solution aisée que donne le bon sens avec la solution, plus difficile pour le commençant, que donne l'algèbre. La même remarque s'applique à plusieurs des exercices que l'on trouvera à la fin du chapitre. Cette comparaison permet de se rendre compte du mécanisme de la solution algébrique et donne confiance en ce mécanisme, fort commode dans les cas où c'est la solution directe qui est trop compliquée.

39. **Forme plus générale de l'équation du mouvement uniforme.** — Dans les problèmes que l'on se pose au sujet du mouvement uniforme d'un ou de plusieurs mobiles sur un axe, on a souvent à résoudre la question suivante : *connaissant l'abscisse du mobile à une certaine époque, calculer cette abscisse à une autre époque.*

Solution. — Désignons par t_0 l'époque à laquelle on connaît l'abscisse du mobile, soit x_0 cette abscisse;



Fig. 9.

le mobile est en A_0; on se propose de déterminer l'abscisse x_1 du point A_1 où se trouve le mobile à l'époque t_1.

Or, on a, d'une part :

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_0} + \overline{A_0A_1}$$

et d'autre part :

$$\overline{A_0A_1} = v\,(t_1 - t_0),$$

car $\overline{A_0A_1}$ est l'espace parcouru pendant le temps $t_1 - t_0$ (temps positif si t_1 désigne une époque postérieure à t_0 et négatif dans le cas contraire).

On a donc, puisque $\overline{OA_1} = x_1$; $\overline{OA_0} = x_0$:

$$x_1 = x_0 + v\,(t_1 - t_0).$$

Telle est la forme plus générale que l'on peut donner à l'équation du mouvement uniforme. Dans cette formule x_0 désigne l'abscisse qui correspond à l'époque t_0 et x_1 l'abscisse qui correspond à l'époque t_1 ; ces époques sont tout à fait quelconques.

Cette formule donnerait très rapidement la solution du problème de la page 72 ; on aurait, en désignant par x_1 la distance cherchée,

$$\begin{aligned} x_0 &= 30, \\ v &= -2, \\ t_0 &= 3, \\ t_1 &= 12, \end{aligned}$$

l'unité de temps étant la minute et l'origine des temps midi. Il en résulte :

$$x_1 = 30 + (-2)(3 - 12) = 30 + (-2) \times (-9) = 48,$$

ce qui coïncide avec le résultat que nous avions trouvé (l'unité de longueur est le kilomètre).

Traitons encore un problème.

Problème. — *Deux coureurs se déplacent sur une même route, le premier avec une vitesse* $+ 4$, *le second avec une vitesse* $- 5$, *les unités étant le mètre et la seconde. A midi* $12^m 13^s$, *l'abscisse du premier est* $- 50$ *et l'abscisse du second est* $+ 300$; *quelle est la distance qui les sépare à midi* $13^m 2^s$?

En prenant pour origine des temps midi 12^m, nous avons $t_0 = 13$, $t_1 = 62$, l'unité choisie dans l'énoncé étant la seconde. Si l'on désigne par x_0 et x_1 les abscisses du premier coureur aux temps t_0 et t_1 et par y_0 et y_1 les abscisses du second coureur aux mêmes époques, nous aurons, d'après l'énoncé :

$$x_0 = -50 \qquad y_0 = 300.$$

La formule générale donne :

$$x_1 = x_0 + 4\,(t_1 - t_0),$$
$$y_1 = y_0 - 5\,(t_1 - t_0),$$

puisque la vitesse du premier est 4 et celle du second -5. En remplaçant x_0, y_0, t_0, t_1 par leurs valeurs dans ces formules, on obtient :

$$x_1 = -50 + 4\,(62 - 13) = -50 + 4 \times 49 = 146,$$
$$y_1 = \ 300 - 5(62 - 13) = \ 300 - 5 \times 49 = \ 55.$$

La distance des deux coureurs à midi $13^m 2^s$ est donc égale à $146 - 55 = 91$; elle est de 91 mètres. Nous savons de plus que si, à cette époque, le premier est en A et le second en B, le segment $\overline{AB}$ est négatif, puisque l'abscisse de A est supérieure à celle de B ; on a donc :

$$\overline{AB} = -91.$$

Après avoir étudié les équations du premier degré, on se rendra compte combien l'équation du mouvement uniforme est un instrument commode pour résoudre de nombreux problèmes.

IV. DÉTERMINATION D'UN POINT SUR UNE DROITE, PAR LE RAPPORT DE SES DISTANCES A DEUX POINTS FIXES DE CETTE DROITE

40. **Remarques préliminaires.** — Soient A et B deux points fixes d'une droite, M un point variable. Choisissons un sens positif, par exemple le sens de A vers B, et considérons le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, c'est-à-dire le rapport des distances de M aux points A et B, affectées d'un signe convenable. Nous remarquerons que ce rapport ne change pas si l'on change le sens choisi comme sens positif; en effet, par ce changement $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ changent tous deux de signes; leur rapport ne change donc pas. Donc le rapport considéré ne dépend pas du sens choisi comme sens positif; il est défini sur la droite, sans qu'il soit nécessaire de la transformer en un axe.

De plus ce rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ ne dépend évidemment pas de l'unité de longueur choisie; on exprime cette propriété en désignant ce rapport sous le nom de *coordonnée homogène* du point M, les *points fondamentaux* étant A et B. On donne le nom général de *coordonnée* à tout nombre de nature à fixer la situation d'un élément géométrique; ainsi l'*abscisse* d'un point est une *coordonnée*. Le qualificatif *homogène* exprime le fait que la *coordonnée* est indépendante de l'unité de longueur; l'abscisse d'un point n'est pas une coordonnée homogène; si elle est 3 lorsque

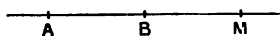


Fig. 10.

le mètre est pris pour unité, elle devient 300 lorsqu'on prend pour unité le centimètre. Au contraire, si l'on considère un point M tel que $\overline{MA} = 2\overline{MB}$ (fig. 10), le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est égal à 2, indépendamment de toute unité de mesure; la coordonnée homogène est 2.

41. **Détermination d'un point par sa coordonnée homogène.** — A tout point de la droite correspond un nombre positif ou négatif qui est sa coordonnée homogène; nous allons faire voir qu'à tout nombre positif ou négatif correspond un point et un seul dont la coordonnée homogène est égale à ce nombre. Dans ce but faisons la construction géométrique suivante (fig. 11).

Prenons un point S en dehors de AB, joignons SB et menons par A une droite parallèle à SB; soit C le point d'intersection de cette droite avec la parallèle à AB menée par S. En résumé, le quadrilatère ABSC est un parallélogramme. Considérons la droite AC comme un axe, sur lequel le sens positif est le sens de A vers C; prenons comme origine des abscisses le point A et, comme unité de longueur, la longueur AC; de telle manière que l'abscisse de A est 0 et l'abscisse de C est 1.

Soit maintenant M un point de AB; joignons SM et désignons par m le point d'intersection de SM avec AC; nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Le rapport* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ *est égal, en grandeur et en signe, à l'abscisse du point* m, *le sens positif, l'origine et l'unité de longueur étant choisis comme nous l'avons dit.*

Nous distinguerons trois cas, suivant que le point variable est en M, M′ ou M″, auxquels correspondent les points m, $m_{\prime}$, m''. On voit sur la figure que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est positif, ainsi que $\frac{\overline{M''A}}{\overline{M''B}}$; les abscisses $\overline{Am}$ et $\overline{Am''}$ sont aussi positives; de même $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$ est négatif et $\overline{Am'}$ est aussi négatif. Il n'y a donc pas de difficulté

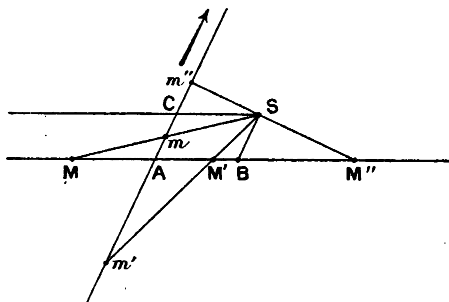


Fig. 11.

de signes et il suffit de démontrer la relation entre les longueurs.

Or, les triangles MAm et MBS sont semblables, puisque Am est parallèle à BS ; on a donc :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{Am}{BS}.$$

Or BS = AC = 1, *puisque l'on a pris* AC *comme unité de longueur;* on a donc bien :

$$\frac{MA}{MB} = Am.$$

De même les triangles semblables M′Am' et M′BS donnent :

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{Am'}{BS} = Am',$$

et les triangles M″Am'', M″BS donneraient une relation analogue.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *A tout nombre x positif ou négatif correspond un point bien déterminé* M *dont la coordonnée homogène est égale à x.* En effet, à tout nombre x, correspond un point m dont l'abscisse est égale à x; il suffit de joindre Sm et de prendre son intersection avec AB pour avoir le point M.

42. **Remarque sur l'homogénéité.** — Nous avons dit tout à l'heure que l'abscisse n'est pas une coordonnée homogène et cependant nous venons de démontrer que *la coordonnée homogène de* M *est égale à l'abscisse de m;* il semble qu'il y a là une contradiction ; il y en aurait une, en effet, si l'énoncé ne devait être complété ainsi : *lorsque l'unité de longueur est* AC ; l'abscisse de m est donc bien déterminée, et on ne peut pas la faire varier en faisant varier l'unité de longueur, puisque l'on suppose essentiellement que cette unité est la longueur AC, bien déterminée par la figure même. Si l'on voulait changer la position de C, il faudrait changer la position de S, et m changerait aussi ; il résulte de la démonstration même que l'abscisse ne changerait pas.

43. **Cas exceptionnels. Symbole ∞.** — Nous avons dit qu'à tout point m de la droite AC corres-

pond un point M de la droite AB, et réciproquement. Il y a cependant deux cas exceptionnels : si la droite SM coïncide avec SB, le point M étant en B, le point m n'existe plus, puisque SM est parallèle à AC; de même si le point m coïncide avec C, le point M n'existe pas puisque Sm est alors parallèle à AB. Ces deux cas exceptionnels sont tout à fait analogues l'un à l'autre; il nous suffira d'étudier l'un d'eux.

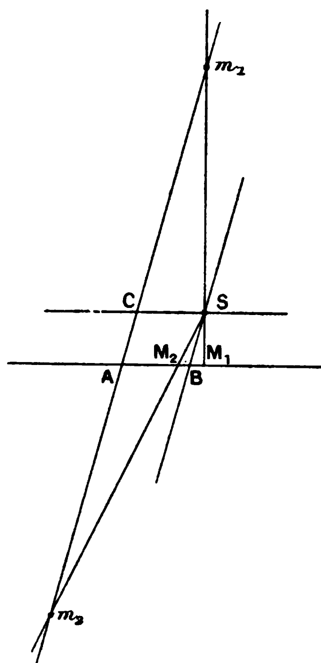


Fig. 12.

Donnons à M une position très voisine de B, soit à droite, soit à gauche; à chaque position telle que M_1 ou M_2 correspond un point m_1 ou m_2 dont l'abscisse est positive ou négative, mais d'autant plus grande en valeur absolue que M_1 ou M_2 est plus rapproché de B. Donc, lorsque m_1 ou m_2 s'éloignent indéfiniment du côté positif ou du côté négatif, les points M_1 et M_2 se rapprochent indéfiniment du point B (fig. 12).

On est ainsi conduit à dire que le point B correspond *au point à l'infini* de la droite AC, ce langage ne signifiant rien de plus que ce que nous venons

de dire. On désigne par le symbole ∞ (que l'on énonce : *infini*) l'abscisse de *ce point à l'infini*, c'est-à-dire l'abscisse du point d'intersection de AC avec la droite parallèle SB; ce point n'existe pas, c'est-à-dire n'est pas un point de la droite que l'on puisse marquer; on l'introduit de manière qu'à chaque point de AB, sans exception, corresponde un point de AC, et réciproquement. On dira donc que la coordonnée homogène de B est égale à ∞ ; c'est la valeur du rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ lorsque M coïncide avec B, c'est-à-dire lorsque $\overline{MB} = 0$; lorsque $\overline{MB}$ est très petit, ce rapport est très grand en valeur absolue, d'autant plus grand que $\overline{MB}$ est très petit; lorsque $\overline{MB} = 0$, ce rapport n'est plus défini; il n'est égal à aucun nombre positif ou négatif; il est donc nécessaire de créer un signe nouveau pour le désigner, si l'on veut pouvoir le désigner par un signe; on dit qu'il est égal à ∞.

De même, il n'y a pas de point sur la droite AB dont la coordonnée homogène soit $+1$; car SC est parallèle à AB; d'ailleurs il est bien évident qu'il n'y a pas de point M sur AB tel que $\overline{MA} = \overline{MB}$. Nous dirons que *le point à l'infini* de AB a pour coordonnée homogène 1; c'est le point d'intersection de AB avec SC; d'ailleurs, plus M est éloigné de A et de B, plus le rapport de $\overline{MA}$ à $\overline{MB}$ est voisin de l'unité.

Remarque. — On emploie quelquefois le symbole $+\infty$ pour exprimer qu'un point s'est éloigné indéfiniment sur un axe, dans le sens positif, et le symbole $-\infty$ pour exprimer qu'un point s'est éloigné indéfiniment dans le sens négatif.

Cette notation est quelquefois utile, mais elle peut prêter à une confusion regrettable; on doit considérer qu'il n'y a qu'*un* point à l'infini sur une droite, car il ne correspond à un point qui s'éloigne indéfiniment qu'*une seule* coordonnée homogène. Sur la figure 12, lorsque m_1 et m_2 s'éloignent indéfiniment chacun de son côté, les points M_1 et M_2 viennent tous les deux se confondre avec le point B, l'un à droite, l'autre à gauche; il n'en résulte pas qu'il y a *deux* points B, l'un à droite, l'autre à gauche, bien que dans certains problèmes il puisse être utile de savoir si l'on s'approche du point B vers la droite ou vers la gauche. De même, il peut être utile de savoir si l'on s'éloigne indéfiniment du côté positif ou du côté négatif; on s'approche du point à l'infini, de même que du point B, de deux côtés différents, mais il n'en résulte pas qu'il y ait *deux* points à l'infini.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

50. — L'heure de New-York retarde de $5^h5^m23^s$ sur celle de Paris. L'heure de Saint-Pétersbourg avance de $1^h51^m52^s$ sur celle de Paris. Quelle différence y a-t-il entre l'heure de New-York et celle de Saint-Pétersbourg?

51. — L'heure des chemins de fer français retarde de 5 min. sur l'heure de Paris; l'heure des chemins de fer suisses avance de 50^m39^s sur celle de Paris; quelle heure marquent les horloges des chemins de fer suisses lorsque les horloges des chemins de fer français marquent midi?

52. — Lorsqu'il est midi à Paris, les horloges des observatoires suivants marquent :

Anvers	midi $8^m 18^s$	Milan	midi $27^m 25^s$
Bruxelles	midi $8^m 8^s$	Kœnigsberg . .	$1^h 12^m 38^s$
Christiania . . .	midi $33^m 33^s$	Rome	midi $40^m 25^s$
Berne.	midi $20^m 25^s$	Madrid	$11^h 35^m 54^s$
Berlin.	midi $44^m 14^s$	Moscou	$2^h 20^m 56^s$

On demande quelles heures marquent ces diverses horloges lorsqu'il est midi à Rome?

53. — Le tableau suivant indique de combien l'heure

locale des principales villes de France avance ou retarde sur l'heure légale, qui est l'heure de Paris :

Nice.	$+ 19^m 46^s$	Reims.	$+ 6^m 47^s$
Marseille.	$+ 12^m 13^s$	Nancy.	$+ 15^m 24^s$
Bordeaux.	$- 11^m 38^s$	Brest	$- 27^m 19^s$
St-Etienne	$+ 8^m 13^s$	Lille.	$+ 2^m 54^s$
Nantes.	$- 15^m 33^s$	Toulouse.	$- 3^m 34^s$
Lyon.	$+ 9^m 55^s$	Rouen.	$- 4^m 58^s$
Toulon.	$+ 14^m 23^s$	Le Havre.	$- 8^m 55^s$

D'après ce tableau, quelle heure est-il dans ces diverses villes lorsqu'il est 8^h du matin à Brest? lorsqu'il est 6^h du soir à Nice? lorsqu'il est 3^h du matin à Toulouse?

54. — On donne le nom de période julienne à une période inventée par Joseph Scaliger, chronologiste du XVIe siècle, dans le but de fixer et de comparer aisément les dates historiques; l'origine de la période julienne est 4 713 ans avant l'ère chrétienne, de sorte que l'an 1 de l'ère chrétienne coïncide avec l'an 4714 de la période julienne. Cela posé, on demande de fixer, par rapport à l'ère chrétienne, les dates suivantes, qui sont rapportées à la période julienne :

Origine de l'ère des Juifs.	7 octobre 953
Origine de l'ère des Olympiades. . . .	vers juillet 3938
Fondation de Rome.	3961
Origine de l'ère de Nabonassar.	26 février 3967
Origine de l'hégire..	16 juillet 5335
Origine du calendrier républicain. . .	22 septembre 6505

55. — Un voyageur se déplace d'un mouvement uniforme avec une vitesse de $+ 15^{km}$ à l'heure, sur la route de Paris à Lyon, le sens positif étant celui de Paris vers Lyon; à 3^h, il est à 40^{km} de Paris; où sera-t-il à 5^h? où était-il à $1^h 30^m$?

56. — Deux voyageurs se déplacent d'un mouvement uniforme, l'un avec une vitesse de $+ 30^{km}$ à l'heure, l'autre avec une vitesse de $- 15^{km}$ à l'heure. A $2^h 23^m$, la distance qui les sépare est 3^{km}; quelle est-elle à $2^h 40^m$? Quelle était-elle à $2^h 12^m$? On devra choisir un sens positif déterminé.

57. — On considère une plate-forme, analogue au trottoir roulant de l'Exposition de 1900, qui se déplace d'un mouvement uniforme en glissant sur elle-même; un promeneur

parcourt la plate-forme d'un mouvement uniforme. Montrer que la vitesse réelle du promeneur, telle que la mesurerait un observateur placé en dehors de la plate-forme (*vitesse absolue*), est égale à sa vitesse propre sur la plate-forme (*vitesse relative*) augmentée de la vitesse de la plate-forme (*vitesse d'entraînement*).

58. — Comme application, on suppose que la vitesse de la plate-forme est de 5^{km} à l'heure et que le promeneur marche sur la plate-forme avec une vitesse de 6^{km} à l'heure; quelle vitesse paraît-il avoir, pour un observateur situé en dehors de la plate-forme : 1° lorsqu'il marche dans le même sens que la plate-forme? 2° quand il se déplace en sens inverse?

59. — En admettant que la vitesse de la lumière dans le vide soit de $300\,000^{km}$ par seconde, on demande à quelle distance de la Terre se trouve l'étoile polaire, sachant que la lumière met 46 ans 6 mois à franchir cette distance.

60. — La distance de Sirius à la Terre étant 83 trillions de kilomètres, on demande combien de temps met la lumière à parcourir cette distance.

61. — En admettant que la vitesse du son dans l'air soit de 340^{m} par seconde, on demande à quelle distance doit se produire un phénomène sonore pour que l'oreille ne le perçoive que 2 minutes après sa production.

62. — La vitesse réalisée par le rapide Calais-Paris atteignant 120^{km} à l'heure, on demande combien de mètres il parcourt en 5 secondes.

63. — On suppose que la vitesse initiale d'une balle de fusil est de 450 mètres à la seconde; on suppose, de plus, bien que ce ne soit pas absolument exact, que son mouvement est uniforme et rectiligne et on demande au bout de combien de temps elle atteint un but placé à 2^{km}.

64. — Ayant tracé une droite et marqué sur cette droite deux points A et B, on demande de figurer les points M dont la coordonnée homogène $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ a les valeurs :

$$2, 3, 4; -1, -2, -3, -4;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4};$$

on inscrira à côté de chaque point sa coordonnée homogène.

CHAPITRE IV

ÉLÉMENTS DU CALCUL ALGÉBRIQUE

I. MONÔMES, POLYNOMES. TERMES SEMBLABLES.

44. **Expressions algébriques rationnelles.** — On appelle expression algébrique un ensemble de nombres, de lettres et de signes d'opérations (signes écrits ou sous-entendus) de telle manière que l'on puisse calculer la valeur de l'expression lorsqu'on attribue aux lettres des valeurs déterminées. Une expression algébrique est dite rationnelle lorsque les seuls signes d'opérations, *à effectuer sur les lettres*, sont l'addition, la soustraction, la multiplication [1] et la division, *à l'exclusion de l'extraction des racines*. Par exemple les expressions :

$$\frac{a}{b}, \qquad 3a, \qquad \sqrt{3}\,bc + \sqrt{7}\,d + \frac{e}{\sqrt[3]{12}}$$

sont des *expressions algébriques rationnelles*, bien que la dernière d'entre elles renferme des radi-

1. L'élévation à une puissance d'exposant entier est un cas particulier de la multiplication $a^4 = a \times a \times a \times a$.

caux; mais ces radicaux portent sur des nombres; au contraire

$$b + 3\sqrt{a}, \qquad \sqrt[3]{a+b}, \qquad \sqrt[3]{c} + \sqrt{d}$$

sont des *expressions algébriques irrationnelles*. Nous nous occuperons presque exclusivement des expressions rationnelles; nous rencontrerons quelquefois des expressions irrationnelles, mais nous n'en ferons pas de théorie générale.

45. **Monômes**. — On appelle monôme le produit de plusieurs nombres et lettres.

Ainsi l'expression :

$$(-3) \times a \times (-15) \times b \times a \times c \times 7 \times a \times b$$

est un monôme.

Comme la valeur d'un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs, on peut écrire à gauche tous les facteurs numériques et, de plus, réunir entre eux les facteurs représentés par une même lettre; par exemple, le monôme que nous venons de considérer peut s'écrire aussi :

$$(-3) \times (-15) \times 7 \times a \times a \times a \times b \times b \times c.$$

On peut introduire une nouvelle simplification; la valeur d'un produit ne changeant pas lorsqu'on remplace plusieurs facteurs par leur produit effectué, on remarquera que l'on a :

$$(-3) \times (-15) \times 7 = 315$$
$$a \times a \times a = a^3$$
$$b \times b = b^2,$$

de sorte que notre monôme peut finalement s'écrire

sous la forme simplifiée :

$$315a^3b^2c,$$

dans laquelle ne figure plus aucun signe opératoire explicite; les signes de multiplication sont sous-entendus ou remplacés par les exposants.

C'est sous cette forme simplifiée que nous écrirons toujours les monômes; le facteur numérique, ici 315, qu'il est d'usage d'écrire à gauche, s'appelle le *coefficient*. Le monôme

$$-3\,a^2b$$

a pour coefficient -3. Le coefficient d'un monôme est ainsi un nombre positif ou négatif qui peut être entier, fractionnaire, ou irrationnel. Un monôme dont le coefficient est nul est égal à zéro, car un produit de plusieurs facteurs est nul lorsqu'un de ces facteurs est nul.

46. **Monômes semblables. Addition et soustraction.** — On dit que deux monômes sont *semblables*, lorsqu'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Par exemple, les monômes :

$$\sqrt{3}a^2bc^3, \qquad 15a^2bc^3, \qquad -12a^2bc^3,$$

sont semblables; il en est de même des monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y^5, \qquad 15x^2y^5 \qquad -14x^2y^5, \qquad x^2y^5.$$

Le dernier de ces monômes doit être regardé comme ayant pour coefficient 1, car le produit d'un nombre quelconque par l'unité est égal à ce nombre lui-même; $1x^2y^5$ est donc la même chose que x^2y^5. De même le monôme $-x^2y^3$ doit être regardé comme ayant pour coefficient -1.

Règle. — *La somme de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable à chacun d'eux, ayant pour coefficient la somme des coefficients.*

Exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$12a^3b^2c^4x, \quad 15a^3b^2c^4x, \quad -a^3b^2c^4x, \quad -35a^3b^2c^4x.$$

Ces monômes semblables ont pour coefficients les nombres 12, 15, — 1, — 35 dont la somme est :

$$12 + 15 - 1 - 35 = -9.$$

La somme cherchée est donc $-9a^3b^2c^4x$.

Autre exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$15x^2y^3, \quad x^2y^3, \quad -14x^2y^3, \quad x^2y^3, \quad -3x^2y^3$$

dont les coefficients sont 15, 1, — 14, 1, — 3. La somme de ces coefficients est :

$$15 + 1 - 14 + 1 - 3 = 0.$$

La somme est donc un monôme semblable aux monômes proposés et de coefficient *zéro;* elle est donc égale à zéro.

Justification de la règle. — La règle se justifie par le principe énoncé dans le chapitre II : pour multiplier une somme par un facteur, il suffit de multiplier par ce facteur les diverses parties de la somme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus. Si nous reprenons le premier exemple, nous voyons, en appliquant ce principe, que — 9 étant égal à la somme des nombres 12, 15, — 1, — 35, le produit de — 9 par $a^3b^2c^4x$ est égal à la somme des produits

de 12, 15, -1, -35 par $a^3b^2c^4x$:

$$-9a^3b^2c^4x = 12a^3b^2c^4x + 15a^3b^2c^4x + (-a^3b^2c^4x) + (-35a^3b^2c^4x),$$

ce que nous voulions démontrer.

On justifierait de la même manière la règle de la soustraction que nous nous contenterons d'énoncer.

Règle. — *La différence de deux monômes semblables est un monôme semblable à chacun d'eux ayant pour coefficient la différence des coefficients.*

Soit, par exemple, à retrancher $5a^2b$ de $8a^2b$; on retranchera 5 de 8, ce qui donne 3; la différence cherchée est $3a^2b$. Si l'on avait proposé de retrancher $8a^2b$ de $5a^2b$, il aurait fallu retrancher 8 de 5, ce qui aurait donné -3; le résultat serait donc $-3a^2b$.

47. **Polynomes.** — *On appelle polynome la somme de plusieurs monômes.* Par exemple l'expression :

$$a^3b + x^2y + 12ax^3 + 35xy^3,$$

est un polynome : c'est la somme des monômes a^3b, x^2y, $12ax^3$, $35xy^3$. L'expression :

$$a^3b^2 - 3ab - 2xy + 5a^3$$

est aussi un polynome, car c'est la somme des monômes a^3b^2, $-3ab$, $-2xy$, $5a^3$.

On dit parfois qu'un polynome est une expression formée par une suite de monômes séparés par les signes $+$ et $-$; mais il est préférable de conserver notre première définition, car elle permet de bien comprendre ce que l'on entend par *termes* du polynome : *ce sont les monômes dont ce polynome*

est la somme. Ainsi, le polynome :

$$5a^2b - 8a^3 - a^2 + x^4$$

a 4 termes : $5a^2b$, $-8a^3$, $-a^2$, x^4.

Un polynome qui a *deux* termes s'appelle *binome;* un polynome qui a *trois* termes s'appelle *trinome;* les expressions : quadrinome, quintinome, etc., ne sont pas usitées [1].

48. **Réduction des termes semblables.** — Lorsque deux termes d'un polynome sont deux monômes semblables, on dit que ce sont deux *termes semblables*. On peut, sans changer la valeur du polynome, remplacer deux ou plusieurs termes semblables par leur somme effectuée ; c'est ce qu'on appelle *faire la réduction des termes semblables*. Il suffit d'appliquer la règle de l'addition des monômes.

Exemple. — Soit le polynome :

$$35a^2b + 15xy - 12a^2b + a^3 - xy + 14a^2b - 50a^2b - 8a^3;$$

il est commode, pour effectuer la réduction des termes semblables, de l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} 35a^2b & +15xy & \\ -12a^2b & & +a^3 \\ & -xy & \\ +14a^2b & & \\ -50a^2b & & -8a^3. \end{array}$$

Les termes semblables étant écrits dans des colonnes verticales, on effectue ensuite l'addition

---

1. On écrit quelquefois binôme, trinôme, polynôme ; il n'y a aucune raison pour mettre sur ces mots l'accent circonflexe qui se trouve sur monôme, contraction de mononome.

des coefficients d'une même colonne :

$$35 - 12 + 14 - 50 = -13$$
$$15 - 1 = 14$$
$$1 - 8 = -7.$$

Le polynome proposé peut donc s'écrire sous la formule plus simple :

$$-13a^2b + 14xy - 7a^3.$$

AUTRE EXEMPLE. — Soit le polynome :

$$x^3 + 5x^2 - 8 - 3x^2 - 2x^2 + 15 + 6x - 2 - 3x.$$

On trouve qu'il est égal à :

$$(1 - 3)x^3 + (5 - 2)x^2 + (6 - 3)x + (-8 + 15 - 2),$$

c'est-à-dire à :

$$-2x^3 + 3x^2 + 3x + 5.$$

49. **Degré d'un monôme et d'un polynome.** — On appelle degré d'un monôme par rapport à l'une des lettres x qu'il renferme, l'exposant de cette lettre x dans le monôme. Ainsi le monôme

$$3ab^2c^3x^2y$$

est de degré 2 par rapport à x, de degré 3 par rapport à c, de degré 1 par rapport à y, etc. ; il est de degré *zéro* par rapport à z, car il ne renferme *aucun* facteur égal à z. Le degré d'un monôme *par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres* est, par définition, égal à la somme de ses degrés par rapport à chacune de ces lettres. Par exemple, le monôme écrit plus haut est de degré 3 par rapport à l'ensemble des lettres x et y, de degré 6 par rap-

port à l'ensemble des lettres a, b, c; son *degré total*, c'est-à-dire son degré par rapport à l'ensemble de toutes les lettres qu'il renferme, est 9.

On appelle degré d'un polynome par rapport à une lettre le degré de celui de ses termes dont le degré est le plus élevé; on définit de même le degré d'un polynome par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres. On suppose d'ailleurs que l'on a fait la réduction des termes semblables. Ainsi le polynome :

$$3a^2x^3 + 6a^4x - a^5x^2$$

est de degré 5 par rapport à a et de degré 3 par rapport à x; son degré total est 7; il n'est pas égal à la somme des degrés partiels, parce que le terme dont le degré par rapport à a est le plus élevé n'est pas le même que le terme dont le degré par rapport à x est le plus élevé.

Le polynôme :

$$x^3 + 3x^2 + 6 - 2x^3 + x + x^3$$

est de degré 2 par rapport à x; on le voit en réduisant les termes semblables, ce qui permet de l'écrire :

$$3x^2 + 6 + x.$$

50. **Polynomes ordonnés.** — Ordonner un polynome par rapport à une lettre x, c'est grouper ensemble tous les termes de même degré par rapport à cette lettre, et les écrire, soit dans l'ordre des degrés croissants, soit dans l'ordre des degrés décroissants. Soit, par exemple, le polynome :

$$x^3 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 6 + 7x.$$

Pour l'ordonner, on devra l'écrire :

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 6,$$

ou bien :

$$-6 + 7x - 5x^2 - x^3 + x^4.$$

Dans le premier cas, il est ordonné *suivant les puissances décroissantes;* dans le deuxième cas, suivant les puissances croissantes.

Soit maintenant le polynome :

$$ax + 3x^2 + b + cx^2 - a^2x^2 - bx - 8.$$

Pour l'ordonner, suivant les puissances décroissantes, on l'écrira comme il suit :

$$(3 + c - a^2)\,x^2 + (a - b)\,x + b - 8,$$

en groupant d'abord tous les termes qui renferment x^2, puis tous les termes qui renferment x, puis tous les termes qui ne contiennent pas la lettre x.

Par une extension du mot coefficient, on dira que dans ce polynome ordonné, le coefficient de x^2 est $3 + c - a^2$, le coefficient de x est $a - b$ et le terme indépendant de x est $b - 8$; à ce point de vue, ce polynome sera considéré comme n'ayant que 3 termes : *c'est un trinome en x;* c'est-à-dire que c'est un trinome lorsque l'on porte une attention particulière sur la lettre x. L'utilité de ces définitions apparaîtra plus tard.

II. ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES.

51. — Les règles des opérations sur les monômes et les polynomes sont une conséquence immédiate

des règles et des théorèmes concernant les opérations sur les nombres; nous avons d'ailleurs utilisé, dans le paragraphe précédent, certaines de ces règles, qui sont à peu près évidentes; pour être complet, nous allons les reprendre ici.

52. **Addition et soustraction des monômes.** Règle. — *Pour ajouter plusieurs monômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres avec leurs signes; pour retrancher un monôme, il suffit d'ajouter le monôme opposé.* Cette règle conduit comme résultat à un polynome dans lequel, s'il y a lieu, on fait la réduction des termes semblables.

Exemple. — Ajouter les monômes :

$$15a^2x, \quad -3a^2x, \quad 15a^3y, \quad -a^2x - a^3y.$$

On obtient le polynome :

$$15a^2x - 3a^2x + 15a^3y - a^2x - a^3y,$$

qui s'écrit, plus simplement :

$$11a^2x + 14a^3y.$$

Autre exemple. — Ajouter les monômes :

$$a^3x, \quad -a^2y, \quad a^3,$$

et retrancher du résultat les monômes :

$$-a^3x, \quad -3a^2y, \quad -a^4, \quad 2a^2y.$$

On obtient :

$$a^3x - a^2y + a^3 + a^3x + 3a^2y + a^4 - 2a^2y,$$

ou, plus simplement :

$$2a^3x + a^3 + a^4.$$

53. Addition et soustraction des polynomes. Règle. — *Pour ajouter ou retrancher un polynome, il suffit d'ajouter ou retrancher successivement tous les termes de ce polynome.*

Dans le résultat ainsi obtenu, on fait, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Exemple. — Ajouter les polynomes suivants :

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4,$$
$$-b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x,$$
$$-3b^3 - 6a^4 + 15a^2x - 9.$$

On obtient le polynome :

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4 - b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x$$
$$- 3b^3 - 6a^4 + 15a^2x - 9.$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$21a^2x - 3b^3 - 3a^4 - 11.$$

Autre exemple. — Retrancher le polynome :

$$3a^2x - 9a^3x^2 - 6a^2x^2$$

du polynome :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2.$$

On obtient :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2 - 3a^2x + 9a^3x^2 + 6a^2x^2,$$

ou, plus simplement :

$$6a^2x + 27a^3x^2 + 5a^2x^2.$$

Règle pratique. — *Lorsqu'une somme ou différence de polynomes est indiquée par des parenthèses, pour l'effectuer, on supprime les parenthèses, en*

ayant soin de changer les signes des termes situés à l'intérieur de celles qui sont précédées du signe —.

Exemple. — Soit à calculer :

$$a^3 + b^2 - (3a^3 - 2b^2) + (-a^3 + b^2) - (-6a^3 + 4b^2).$$

On obtient :

$$a^3 + b^2 - 3a^3 + 2b^2 - a^3 + b^2 + 6a^3 - 4b^2,$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$3a^3.$$

Remarque. — Pour faciliter la réduction des termes semblables, il est souvent commode d'écrire les uns au-dessous des autres tous les termes semblables entre eux; cette remarque est surtout utile dans le cas où l'on ajoute des polynomes ordonnés.

Exemple. — Faire la somme des polynomes :

$$\begin{array}{l} 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \\ -2x^3 - x^2 - 6 \\ 9x^2 - 6x - 7 \\ 8 - x^3. \end{array}$$

On disposera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{rrrr} 3x^3 & -5x^2 & +3x & -4 \\ -2x^3 & -x^2 & & -6 \\ & 9x^2 & -6x & -7 \\ -x^3 & & & +8 \\ \hline 0x^3 & +3x^2 & -3x & -9 \end{array}$$

On ajoute entre eux les coefficients des mêmes puissances de x, placés les uns au-dessous des autres; on obtient ainsi le résultat cherché :

$$0x^3 + 3x^2 - 3x - 9,$$

c'est-à-dire,

$$3x^2 - 3x - 9,$$

puisqu'un monôme à coefficient nul est nul.

54. **Multiplication des monômes**. — *Le produit de deux monômes est un monôme admettant comme coefficient le produit des coefficients et comme partie littérale le produit des parties littérales.*

Soit, par exemple, à multiplier les deux monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y \qquad -\frac{5}{6}ab^2.$$

Le produit de $\frac{3}{4}$ par $-\frac{5}{6}$ est $-\frac{5}{8}$; le produit cherché est :

$$-\frac{5}{8}x^2yab^2.$$

De même, le produit des monômes :

$$-\frac{2}{3}ab^3 \qquad -\frac{3}{4}a^2b$$

est :

$$\frac{1}{2}ab^3a^2b.$$

Ce monôme peut d'ailleurs s'écrire plus simplement en groupant les facteurs égaux :

$$\frac{1}{2}a^3b^4.$$

On remarque qu'une lettre telle que a admet pour exposant la somme des exposants qu'elle admettait dans les deux facteurs. On déduit de cette remarque la règle pratique suivante :

Règle pratique. — *Pour former le produit de deux ou plusieurs monômes, on écrit d'abord le produit des coefficients* (pris avec leurs signes); *on écrit ensuite toutes les lettres distinctes qui figurent dans les facteurs en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les divers facteurs.*

Soit, par exemple, à effectuer le produit des monômes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}a^3b^2c \qquad -\frac{2}{\sqrt{2}}ax^2y^3 \qquad -\frac{5}{3}ab^3x^2.$$

Le produit des coefficients $\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{3}$ est $\frac{3\times 2\times 5}{2\times 3}=5$; l'exposant de la lettre a doit être $3+1+1=5$; l'exposant de b : $2+3=5$; l'exposant de c : 1; l'exposant de x : $2+2=4$; l'exposant de y : 3. Le produit est donc :

$$5a^5b^5cx^4y^3.$$

55. **Multiplication d'un polynome par un monôme.** Règle. — *Pour multiplier un polynome par un monôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$3a^2-2b^3+x+5y$$

par le monôme :

$$-abx^2.$$

On obtient :

$$-3a^3bx^2+2ab^4x^2-abx^3-5abx^2y.$$

56. **Multiplication de deux polynomes.** Règle. — *Pour multiplier deux polynomes, il suffit de multiplier l'un d'eux successivement par tous les termes de l'autre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$a^2b - ab + 3b^2$$

par le polynome :

$$a^2 - 2ab + 3b^2.$$

On multiplie d'abord le premier polynome par a^2, ce qui donne :

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2.$$

On le multiplie ensuite par $-2ab$, ce qui donne :

$$-2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3.$$

Enfin, on le multiplie par $3b^2$, ce qui donne :

$$3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4.$$

Il ne reste plus qu'à ajouter ces trois *produits partiels ;* on obtient :

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3$$
$$+ 3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4,$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$a^4b - a^3b + 5a^2b^2 - 2a^3b^2 - 9ab^3 + 3a^2b^3 + 9b^4.$$

57. **Cas des polynomes ordonnés. Disposition pratique.** — Dans le cas où l'on doit multiplier deux polynomes renfermant une seule lettre x, il est commode de les ordonner et de donner à l'opération une disposition particulière que nous allons indiquer sur un exemple.

Exemple. — Soit à multiplier les deux polynomes :

$$3x^3 - 2x^2 + 6x + 1$$
$$2x^2 + 5x - 7.$$

On disposera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -\,2x^2 & +\,6x & +\,1 \\
 & & & 2x^2 & +\,5x & -\,7 \\
\hline
6x^5 & -\,4x^4 & +\,12x^3 & +\,2x^2 & & \\
 & 15x^4 & -\,10x^3 & +\,30x^2 & +\,5x & \\
 & & -\,21x^3 & +\,14x^2 & -\,42x & -\,7 \\
\hline
6x^5 & +\,11x^4 & -\,19x^3 & +\,46x^2 & -\,37x & -\,7
\end{array}$$

On a écrit d'abord l'un des deux polynomes, au-dessous de l'autre et tiré un trait au-dessous duquel sont écrits les produits partiels, ici au nombre de 3, que l'on obtient en multipliant le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur; ces produits partiels sont disposés, comme il a été expliqué pour l'addition, de manière qu'on puisse en faire commodément la somme, qui est inscrite au-dessous du second trait.

Autre exemple. — Multiplier $x^4 + x^2 + 2x + 1$ par $x^3 - x^2 - 1$. L'opération se dispose ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & x^4 & & +\,x^2 & +\,2x & +\,1 \\
 & & & & x^3 & -\,x^2 & & -\,1 \\
\hline
x^7 & & +\,x^5 & +\,2x^4 & +\,x^3 & & & \\
 & -\,x^6 & & -\,x^4 & -\,2x^3 & -\,x^2 & & \\
 & & & -\,x^4 & & -\,x^2 & -\,2x & -\,1 \\
\hline
x^7 & -\,x^6 & +\,x^5 & & -\,x^3 & -\,2x^2 & -\,2x & -\,1.
\end{array}$$

On a eu soin de laisser des blancs correspon-

dant aux degrés pour lesquels il n'y avait pas de termes.

Remarque. — L'égalité qui exprime le résultat des opérations effectuées s'appelle une *identité;* les deux membres deviennent *identiques* lorsqu'on les simplifie; ainsi l'égalité

$$x(x-1) = 2x^2 - x(x+1)$$

est une *identité*. Nous donnons aux Exercices quelques exemples d'identités à vérifier.

III. DIVISION DES MONÔMES, D'UN POLYNOME PAR UN MONÔME

58. **Division des monômes**. — On dit qu'un monôme est divisible par un autre lorsqu'il existe un troisième monôme qui multiplié par le second reproduit le premier. La règle de la division est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

Règle. — *Le quotient de deux monômes a pour coefficient le quotient des coefficients et renferme chaque lettre avec un exposant égal à la différence de ses exposants dans le dividende et dans le diviseur.*

Exemple. — Soit à diviser $35a^3b^2xy$ par $7abx$; on obtient :

$$5a^2by.$$

Il est inutile d'écrire la lettre x, dont l'exposant devrait, d'après la règle, être égal à zéro; nous avons déjà remarqué (page 91) que cela signifie qu'il n'y a *aucun* facteur égal à x. Nous énoncerons donc la

remarque complémentaire suivante, qui est importante :

Remarque. — *On peut supprimer dans un produit toute lettre affectée de l'exposant zéro ; en d'autres termes, on peut remplacer le facteur x^0 par 1.*

59. **Règle de divisibilité.** — Nous avons énoncé la règle de la division en supposant que le dividende était divisible par le diviseur : elle est alors une conséquence de la règle de la multiplication ; pour qu'il y ait divisibilité, il est nécessaire et suffisant que la règle soit applicable, c'est-à-dire que le diviseur ne renferme aucune lettre qui ne figure pas dans le dividende, et ne renferme les lettres qui y figurent qu'avec un exposant au plus égal à celui qu'elles ont dans ce dividende. Lorsque le dividende n'est pas divisible par le diviseur, on se borne à indiquer la division : on a une fraction.

60. **Division d'un polynome par un monôme.** Règle. — *Pour diviser un polynome par un monôme, il suffit de diviser successivement tous les termes du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Exemple. — Diviser le polynome :

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax,$$

par le monôme $15ax$. On obtient :

$$\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}.$$

Remarque. — Pour qu'un polynome (dans lequel on a réduit les termes semblables) soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que chacun de ses termes le soit.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

65. — Réduire les termes semblables dans les polynomes suivants :

$$13a^2x - 8a^3 - 25a^2x + a^3 + b^2 - 12a + 35b^2$$

$$x^3 - 5x + 3x^3 - 8x^2 - 12x + \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 15$$

$$\frac{3}{2}x + 5x^2 - 12x^2y + \frac{3}{4}x^2 - x - xy^2 - x^2y$$

$$\frac{3}{4}x - 4x - 5x + 12 + \frac{3}{7} + x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}x^2.$$

66. — Faire le produit des monômes :

$12a^2bc$ et $13abc^2$

$4xy^2$ et $\frac{2}{3}xy$

$16x^2y^3$ et $\frac{3}{4}xz$

$4abc$ et $\frac{2}{3}a^2bx.$

67. — Faire le produit des six monômes :

$$\frac{2}{3}a^3b; \quad 2abx; \quad 4ax; \quad \frac{1}{6}xy; \quad 9y^2; \quad 3xy.$$

68. — Faire le produit des six monômes :

$$3ax; \quad -2ax^2; \quad -3a^2x^4; \quad \frac{1}{5}ay; \quad -y^2.$$

69. — Faire le produit des 5 monômes :

$$\frac{1}{4}ax; \quad -3x^2; \quad -3xy; \quad 12ax^3; \quad -ay^2.$$

70. — Multiplier le polynome :

$$13ax - 2y^2 + \frac{1}{4}ay + by^3,$$

par le monôme $-5axy$.

71. — Multiplier le polynome :

$$-3x^2 + 12ax + 5 - 3x^4$$

par le monôme $2ax$.

72. — Multiplier les polynomes :

$$3x^2 - 5ax - 4$$
$$2x - 3a.$$

73. — Multiplier les polynomes :

$$3x^2 - 5x - 2.$$
$$3x - 4.$$

74. — Effectuer le produit ci-dessous indiqué de trois polynômes :

$$(a - bx - x^2)(x + y)(z + 3).$$

75. — Multiplier $a + b$ par $a - b$.
76. — Multiplier $a^2 + ab + b^2$ par $a - b$.
77. — Multiplier $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ par $a - b$.
78. — Multiplier $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ par $a - b$.
79. — Généraliser les questions précédentes.
80. — Multiplier $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ par $a + b$.
81. — Généraliser la question précédente.
82. — Calculer le carré de $a + b$.
83. — Calculer le cube de $a + b$.
84. — Calculer le carré de $a + b + c$.
85. — Calculer le cube de $a + b + c$.
86. — Calculer le carré de $a + b + c + d$.
87. — Multiplier $x^3 + 2x^2 - x - 1$ par $x^2 - x - 4$.
88. — Multiplier $x^2 - 2$ par $x^2 - 3x + 5$.
89. — Multiplier $x^2 - 2x + 5$ par $x^2 + 2x + 5$.
90. — Effectuer le produit :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).$$

91. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

92. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$
$$+ (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2.$$

CHAPITRE V

ÉQUATIONS ET INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ

I. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

61. **Généralités sur les équations.** — On appelle équation une égalité renfermant une ou plusieurs lettres, appelées *inconnues* ou *variables;* en général, cette égalité n'est vérifiée que si l'on attribue certaines valeurs à ces lettres. Par exemple :

$$2x + 3 = x + 5$$

est une équation à une inconnue x; cette égalité est vérifiée pour $x = 2$ et n'est pas vérifiée pour $x = 1$.

De même :

$$x + 4 = y + 6 - 3x$$

est une équation à deux *inconnues* ou deux *variables* x et y; elle est vérifiée par exemple pour $x = 2$, $y = 6$ ou pour $x = -4$, $y = 6$, ou pour $x = 1$, $y = 2$; elle n'est pas vérifiée pour $x = 0$,

$y = 0$. Elle est donc vérifiée pour certains *systèmes de valeurs des variables* et pas par tous.

On considère souvent des équations qui, outre les *variables* ou *inconnues*, renferment d'autres lettres que l'on appelle, par opposition, *constantes* ou *données;* on emploie d'habitude pour les inconnues les dernières lettres de l'alphabet et pour les *données* les premières.

Ainsi, on peut considérer une équation telle que la suivante :

$$x + a - 3 = + 5x - 6a + 3y.$$

Elle est vérifiée pour $x = a$, $y = a - 1$, comme on le constate sans peine en *substituant* ces valeurs à x et y, c'est-à-dire en remplaçant x par a et y par $a - 1$.

Une équation qui serait vérifiée pour *toutes* les valeurs des variables ne serait plus une équation, mais une identité. Ainsi l'égalité

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

est une identité. L'identité peut donc être regardée comme un cas particulier de l'équation; lorsque l'on a une équation on doit d'abord se demander si elle est ou n'est pas *identique*.

Une équation se compose de deux expressions algébriques séparées par le signe $=$; ce sont les deux *membres* de l'équation; l'expression écrite à gauche est *le premier membre;* l'autre est *le second membre.*

PRINCIPE. — *On peut ajouter une même quantité aux deux membres d'une équation sans modifier la ou les solutions de cette équation.*

Car, si deux quantités sont égales, on obtient d'autres quantités égales en leur ajoutant une troisième quantité quelconque.

De ce principe résulte un théorème fondamental.

Théorème. — *On peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.*

Démonstration. — Soit l'équation :

$$3x + 5y + 7 = 8a - 9 + x,$$

et soit proposé de faire passer le terme x du second membre dans le premier. Il suffit d'ajouter $-x$ aux deux membres; comme $x - x$ donne zéro dans le second membre, on obtient :

$$3x + 5y + 7 - x = 8a - 9,$$

ce qui démontre le théorème. On peut faire passer tous les termes d'une équation dans le premier membre; le second membre se réduit alors à *zéro*. Ainsi *toute équation peut prendre la forme*

$$A = 0,$$

en désignant par A une certaine expression algébrique plus ou moins compliquée. Nous ne considérerons que les équations telles que A se réduise à un polynome; *on appelle alors degré de l'équation le degré de ce polynome par rapport aux inconnues*. Nous étudierons d'abord les équations du premier degré.

62. **Exemples d'équations du premier degré à une inconnue.** — Soit l'équation :

$$3 + 5x = 8x - 1.$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre; nous obtenons :

$$5x - 8x + 3 + 1 = 0,$$

ou, en réduisant :

$$-3x + 4 = 0,$$

c'est donc une équation du premier degré; en faisant passer le terme connu dans le second membre, nous obtenons :

$$-3x = -4.$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit que x soit tel que son produit par -3 soit égal à -4; x doit donc, d'après la définition même de la division, être égal au quotient de -4 par -3, c'est-à-dire que l'on a :

$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Telle est la solution de l'équation proposée; la méthode même par laquelle nous l'avons obtenue montre qu'elle est unique.

Autre exemple. — Soit l'équation :

$$6x + (x-3)(x-1) = x^2 - \frac{3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

En faisant passer tous les termes dans le premier membre et en effectuant, on obtient :

$$6x + x^2 - 4x + 3 - x^2 + \frac{3x}{7} - \frac{13}{4} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left(6 - 4 + \frac{3}{7}\right)x + 3 - \frac{13}{4} = 0.$$

C'est une équation du premier degré que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{17}{7}x = \frac{1}{4}$$

d'où l'on tire, par le même raisonnement que tout à l'heure :

$$x = \frac{1}{4} : \frac{17}{7} = \frac{7}{68}.$$

On déduit de ces exemples la règle pratique suivante :

Règle. — *Lorsqu'on s'est assuré qu'une équation est du premier degré en faisant passer tous ses termes dans le premier membre, on isole l'inconnue dans le premier membre et le terme connu dans le second; la solution s'obtient alors en divisant ce terme connu par le coefficient de l'inconnue.*

Remarque. — Pratiquement, lorsque l'équation proposée est simple, il n'est pas nécessaire de faire passer tous les termes dans le premier membre pour s'assurer qu'elle est du premier degré; il est préférable d'appliquer seulement la seconde partie de la règle, c'est-à-dire de faire passer les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second.

Exemple. — Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{2}x + 7 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 9.$$

On obtiendra d'abord :

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)x = -9 - 7 + \frac{7}{4}.$$

Puis, successivement :

$$\frac{1}{4}x = \frac{7-64}{4} = -\frac{57}{4}.$$

$$x = -\frac{57}{4} : \frac{1}{4} = -57.$$

63. **Équations à coefficients littéraux.** — La règle est la même, lorsque l'équation, outre l'inconnue x, renferme d'autres lettres *données* a, b, c. Soit, par exemple, l'équation :

$$3ax + b = cx + 4.$$

On l'écrira comme il suit :

$$(3a - c)x = 4 - b,$$

et on en déduira que x est égal au quotient de $4 - b$ par $3a - c$, ce que l'on écrira ainsi :

$$x = \frac{4 - b}{3a - c},$$

en se bornant à *indiquer* ce quotient que l'on ne peut pas effectuer. Si l'on avait :

$$3abx = a^3b^2,$$

on obtiendrait, par la règle de division des monômes :

$$x = \frac{a^3b}{3ab} = \frac{1}{3}a^2b.$$

Si l'on a l'équation :

$$(a - b)x = a^2 - b^2$$

on écrit

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}.$$

Mais l'on sait (Exercice 75) que l'on a identiquement :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

si donc on suppose que $a - b$ n'est pas nul, on obtient :

$$x = a + b$$

car, dans ce cas, il y a un seul nombre qui, multiplié par $a - b$ donne pour produit $a^2 - b^2$ et l'on sait que $a + b$ satisfait à cette condition. Si $a - b$ était nul, l'équation proposée se réduirait à une identité.

La connaissance de certaines identités permet ainsi de résoudre certaines équations sans connaître la division des polynomes ; mais, dans la plupart des cas, la division de deux polynomes n'est pas possible et on doit se borner à l'indiquer.

Règle. — *Pour résoudre une équation du premier degré on l'écrit sous la forme :*

$$Ax = B,$$

A *et* B *étant des expressions algébriques ne renfermant pas* x*; la solution est alors donnée par la formule :*

$$x = \frac{B}{A},$$

dans laquelle on se borne à indiquer la division, quand on ne peut ou ne sait pas l'effectuer.

64. **Discussion.** — Considérons l'équation du premier degré :

$$ax = b,$$

dans laquelle a et b désignent deux nombres donnés quelconques. *Discuter* cette équation, c'est

étudier les circonstances diverses qui peuvent se présenter, suivant les valeurs des nombres a et b. Ces valeurs peuvent être des nombres positifs ou négatifs, ou bien le nombre zéro. Supposons d'abord que a ne soit pas égal à zéro; il existe alors, quel que soit b, un nombre et un seul qui, multiplié par a, donne pour produit b; on désigne ce nombre par $\frac{b}{a}$; l'équation est donc vérifiée lorsqu'on remplace x par $\frac{b}{a}$ et seulement dans ce cas; elle admet *une seule* solution bien déterminée; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque le coefficient a de x n'est pas nul, l'équation du premier degré $ax = b$ admet une solution unique et bien déterminée.*

Supposons maintenant que a soit nul; on peut dire alors qu'il n'y a plus d'équation, puisque x disparaît. Ce cas ne se présenterait donc pas si l'on ne considérait que des équations numériques car on n'aurait jamais pensé à regarder comme une équation une égalité ne renfermant pas x; mais lorsque les coefficients sont des lettres, il peut arriver que l'on soit conduit, par le problème posé, à donner dans certains cas à ces lettres des valeurs telles que a prenne la valeur zéro; on saisira la portée de cette remarque en étudiant le chapitre suivant. On se propose de savoir ce que devient la solution dans ce cas particulier.

Supposons d'abord que a étant égal à zéro, b soit différent de zéro; il n'existe alors aucun nombre x, qui, multiplié par a, donne pour produit b; l'équation est *impossible*. On remarquera que, si a

est très petit, $\frac{b}{a}$ est très grand en valeur absolue, et d'autant plus grand que a est plus petit; il est donc naturel de dire que la solution disparaît en devenant infiniment grande et de la représenter par le symbole ∞ (que nous avons déjà employé au n° 43).

Supposons enfin que a et b soient nuls tous les deux; alors tout nombre vérifie l'équation, puisque tout nombre multiplié par zéro, donne pour produit zéro; on dit alors que l'équation est indéterminée; elle admet pour solution *un nombre quelconque.* La formule dans ce cas se réduit à la forme $\frac{0}{0}$ puisque b et a sont tous deux nuls; aussi dit-on quelquefois que $\frac{0}{0}$ est un symbole d'indétermination.

On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION $ax = b$

HYPOTHÈSES :	LA SOLUTION :	ON DIT QUE L'ÉQUATION EST	FORMULE OU SYMBOLE
$a \neq 0$	est unique	déterminée	$x = \frac{b}{a}$
$a = 0$ $b \neq 0$	n'existe pas	impossible	$x = \infty$
$a = 0$ $b = 0$	est un nombre quelconque	indéterminée	$x = \frac{0}{0}$

II. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

65. **Systèmes d'équations.** — On dit que plusieurs équations forment un *système* lorsque l'on suppose que les inconnues ou variables qui y sont désignées par les mêmes lettres doivent y être remplacées par les mêmes nombres; lorsque ces nombres vérifient toutes les équations, ils constituent *une solution du système.*

Par exemple le système :

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

admet la solution $x = 2$, $y = 1$; le système :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 13 \\ 2x^2 + 3y^2 - z &= 4 \end{aligned}$$

admet la solution $x = 1$, $y = 2$, $z = 10$.

On dit que deux systèmes sont *équivalents* lorsqu'ils admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire lorsque toute solution du premier est solution du second et que toute solution du second est solution du premier.

La méthode que nous avons suivie pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue revenait au fond à remplacer cette équation par une équation équivalente plus simple; de même, pour résoudre un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, on cherche à le remplacer par un système équivalent plus simple. Nous allons étudier d'abord un système de deux équations à deux inconnues.

66. **Système de deux équations à deux inconnues.** — Étant donné un système d'équations du premier degré, on commence par simplifier chacune des équations en opérant comme nous avons fait dans le cas d'une inconnue, c'est-à-dire en réunissant les termes inconnus dans les premiers membres et les termes connus dans les seconds.

Soient, par exemple les équations :

$$\begin{cases} 3 + 2x = 4 - 5y \\ 2 - 2y = 6 - 3x. \end{cases}$$

On peut les écrire :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous emploierons la méthode dite *de substitution*. Il s'agit de déterminer des valeurs de x et de y qui vérifient ces deux équations. Si l'on connaissait la valeur de x, la première équation donnerait la valeur de y par la formule

$$y = \frac{1 - 2x}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x,$$

dans laquelle x aurait une valeur déterminée.

Cette valeur de y doit vérifier la seconde équation, dans laquelle la lettre x a la *même* valeur, d'après la définition d'un système; si l'on *substitue* cette valeur de y dans cette seconde équation, on obtient :

$$3x - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 4.$$

C'est une équation du premier degré à une seule

inconnue x; elle donnera pour x une valeur unique et déterminée et, connaissant cette valeur de x, on obtiendra la valeur de y par la formule déjà écrite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x.$$

Entrons dans le détail des calculs ; l'équation en x donne successivement :

$$3x + \frac{4}{5}x = 4 + \frac{2}{5}$$

$$\frac{19}{5}x = \frac{22}{5}$$

$$x = \frac{22}{19},$$

et l'on a ensuite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x = \frac{19 - 44}{5 \times 19} = \frac{-25}{5 \times 19} = \frac{-5}{19}.$$

On déduit de la marche suivie la règle suivante.

Règle. — *Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y par la méthode de substitution, on résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues, y par exemple, comme si l'autre inconnue x était connue; on substitue l'expression obtenue à y, dans l'autre équation, qui devient ainsi une équation à une inconnue x, que l'on sait résoudre. La valeur de x ayant été obtenue par la résolution de cette équation, on obtient y en remplaçant x par cette valeur dans l'expression de y.*

67. **Cas d'impossibilité et d'indétermination.** — Nous avons ramené la résolution d'un système à la résolution d'une équation du premier degré à

une inconnue; suivant que cette équation sera déterminée, impossible, ou indéterminée, le système lui-même sera déterminé, impossible, ou indéterminé. Nous avons déjà donné un exemple du cas déterminé, c'est-à-dire du cas où la solution existe, et est unique. En voici des cas d'impossibilité et d'indétermination.

Exemple I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15 \\ 6x + 9y = 18. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = \frac{15 - 4x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{4}{6}x = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}x.$$

En remplaçant y par cette valeur dans la seconde, on a :

$$6x + 9\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}x\right) = 18$$

$$(6 - 6)x = 18 - \frac{45}{2} = \frac{-9}{2}.$$

Le coefficient de x est égal à zéro et le terme indépendant de x n'est pas nul : *l'équation est impossible;* le système proposé est donc impossible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de valeurs de x et de y qui le vérifient.

Exemple II. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 6y = 18 \\ 6x + 9y = 27. \end{cases}$$

On tire de la première équation :

$$y = \frac{18 - 4x}{6} = 3 - \frac{2}{3}x$$

et la seconde devient :

$$6x + 9\left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 27$$

$$(6 - 6)x = 27 - 27.$$

Elle se réduit à une identité : le coefficient de x et le terme constant sont tous deux nuls; x est *indéterminé*, c'est-à-dire qu'une valeur quelconque de x vérifie cette équation. On pourra donc choisir x arbitrairement; y sera alors donné par la formule que nous avons obtenue :

$$y = 3 - \frac{2}{3}x.$$

Par exemple, on pourra prendre $x = 3$ et l'on aura $y = 1$; ou bien $x = -3$ et l'on aura $y = 5$, etc.

L'indétermination est ici *simple;* on entend par là qu'*une* inconnue et *une seule* peut être prise arbitrairement, et que l'autre inconnue est alors déterminée, sa valeur dépendant d'ailleurs généralement de la valeur choisie pour la première.

68. **Systèmes de plus de deux équations**. — La méthode de substitution s'applique sans modification essentielle à la résolution d'un système de 3, 4, etc., équations à 3, 4, etc., inconnues. Nous allons le montrer sur quelques exemples.

Exemple I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 5x + 8y + 2z = 1 \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$z = \frac{16 - 2x - 3y}{4} = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y.$$

En substituant cette valeur dans les deux autres, on obtient :

$$5x - 8y + 2\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 1$$

$$3x - y - 2\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 5$$

ou, en simplifiant :

$$\begin{cases} 4x - \dfrac{19}{2}y = -7 \\ 4x + \dfrac{1}{2}y = 13. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues.

La première de ces équations donne :

$$y = \frac{-7 - 4x}{-\frac{19}{2}} = \frac{14}{19} + \frac{8}{19}x$$

et la seconde devient alors :

$$4x + \frac{1}{2}\left(\frac{14}{19} + \frac{8}{19}x\right) = 13,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{80}{19}x = \frac{240}{19}$$

d'où :

$$x = 3.$$

On a ensuite :

$$y = \frac{14}{19} + \frac{8}{19}x = \frac{14 + 24}{19} = 2$$

$$z = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

lètement

ent :

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}y = -\frac{9}{4} \\ -x - \frac{1}{2}y = -\frac{27}{4}. \end{array}\right.$$

La première de ces équations donne :

$$y = \frac{3}{2}.$$

Il se trouve que cette valeur ne renferme pas x; mais cela ne change en rien la méthode; la substitution dans la seconde équation donne :

$$-x - \frac{3}{4} = -\frac{27}{4},$$

c'est-à-dire :

$$-x = -6$$
$$x = 6.$$

Connaissant x et y, on a :

$$z = \frac{49}{4} - x - y = \frac{49}{4} - 6 - \frac{9}{4} = 4.$$

Connaissant x, y et z, on a :

$$t = 14 - x - y - z = 14 - 6 - \frac{3}{2} - 4 = \frac{5}{2}.$$

Le système est résolu.

Remarque I. — On abrège souvent beaucoup les calculs en choisissant convenablement l'équation d'où l'on tire la valeur de l'une des inconnues pour la substituer dans les autres. C'est surtout la pratique des calculs qui guide pour ce choix; d'une manière générale on peut seulement dire que l'on doit

s'arranger pour avoir des expressions aussi simples que possible.

Reprenons, par exemple, le système précédent, que nous récrivons :

$$\begin{cases} x+y+z+t=14 \\ 2y-4t=-7 \\ x+z=10 \\ z+2t=9. \end{cases}$$

On remarquera que la troisième expression donne pour z une expression très simple :

$$z=10-x.$$

En substituant cette valeur dans les trois autres on obtient :

$$\begin{aligned} x+y+(10-x)+t&=14 \\ 2y-4t&=-7 \\ (10-x)+2t&=9, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y+t=4 \\ 2y-4t=-7 \\ -x+2t=-1. \end{cases}$$

La première de ces équations donne :

$$y=4-t,$$

d'où en substituant :

$$\begin{cases} 2(4-t)-4t=-7 \\ -x+2t=-1, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -6t=-15 \\ -x+2t=-1, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$t = \frac{-15}{-6} = \frac{5}{2}.$$

On obtient ensuite :

$$-x = -1 - 2t = -6$$
$$x = 6$$
$$y = 4 - t = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$
$$z = 10 - x = 10 - 6 = 4.$$

Remarque II. — Dans la résolution des équations et des systèmes, on a quelquefois avantage à *chasser les dénominateurs*, c'est-à-dire à multiplier tous les termes par le plus petit commun multiple des dénominateurs; cette opération remplace chaque équation par une équation équivalente, car lorsque deux nombres sont égaux, leurs produits par un même nombre sont égaux, et réciproquement.

De même, il est quelquefois commode de *changer tous les signes* dans une équation; cela revient à multiplier tous les termes par -1.

On peut aussi multiplier tous les termes d'une équation littérale par une même lettre, mais il est alors *essentiel* d'être certain que cette lettre ne représente pas zéro; sinon on remplacerait l'équation par une identité. Ainsi l'équation :

$$2x = 3$$

est équivalente à l'équation :

$$2ax = 3a,$$

si a n'est pas nul; si a est nul, la première équa-

andis que

x. Nous

qui sera

l'*Algèbre*

pelle *iné-*

e que, de

re; ainsi,

à 3, ou

eut écrire

ux inéga-

t que *l'on*

négalité, à

inférieur

s, le plus

utre :

ens d'une

inégalité en ajoutant ou retranchant un même nombre à ses deux membres.

Par exemple, l'on a :

$$-4 < -3,$$

l'on a aussi :

$$-4 + 12 < -3 + 12$$
$$-4 - 15 < -3 - 15,$$

c'est-à-dire :

$$8 < 9$$
$$-19 < -18.$$

Nous nous contenterons de cette vérification.

THÉORÈME. — *On ne modifie pas le sens d'une inégalité en multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre* POSITIF ; *on modifie ce sens en multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre* NÉGATIF.

Par exemple, on a :

$$2 < 4$$

en multipliant les deux membres par 3, on obtient :

$$6 < 12$$

et en les divisant par 8 :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

inégalités de même sens que la proposée. Au contraire, en multipliant les deux membres par -2, on obtient :

$$-4 > -8,$$

et en les divisant par — 2 :

$$-1 > -2,$$

inégalités de sens contraire à la proposée.

Nous nous contenterons de ces vérifications.

70. **Inégalités du premier degré.** — On appelle inégalité du premier degré une inégalité dans laquelle figure, outre les quantités connues, une inconnue (ou variable) *x au premier degré*[1]. Par exemple, l'inégalité :

$$3x - 7 - 5x > \frac{3}{2}x - 9$$

est une inégalité de premier degré en x. Résoudre une inégalité, c'est déterminer pour quelles valeurs de x elle est satisfaite. Les inégalités du premier degré se résolvent par une marche tout à fait semblable à celle que nous avons indiquée pour les équations; il faut seulement avoir grand soin de changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre *négatif*.

Soit, par exemple, à résoudre l'inégalité :

$$3x - 5 > 5x + 8.$$

En faisant passer les termes renfermant x dans le premier membre et les autres dans le second membre, elle devient :

$$-2x > 13,$$

1. Il serait plus correct d'employer, concurremment avec le mot *inégalité*, les termes *inéquation* et *inidentité*, de même qu'on emploie, concurremment avec *égalité*, les termes *équation* et *identité*. Nous nous conformons à l'usage le plus répandu, ce qui n'a pas d'inconvénient grave dans les questions élémentaires que nous traitons.

d'où en divisant par -2 :

$$x < \frac{-13}{2}.$$

On a changé le sens, puisque -2 est négatif.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

93. — Résoudre les équations :

$$3x + 5 = x - 4$$

$$\frac{3}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 2$$

$$\frac{3x-6}{7} + \frac{2x-4}{3} = \frac{5x-9}{21}$$

$$\frac{2x-1}{4} + 10x - 3 = 0$$

$$\frac{5}{6}x - 2(1-x) + 3(1-5x) = \frac{3}{4}.$$

Les équations qui renferment des dénominateurs devront être résolues de deux manières : en chassant et sans chasser les dénominateurs.

94. — Résoudre les équations :

$$ax - b = cx - d$$

$$(a - bx)c = (a + bx)d$$

$$\frac{a-bx}{c} = \frac{c-dx}{a}$$

$$\frac{ax-b}{cx-d} = \frac{a+b}{c+d}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b'}{cx+d'}.$$

95. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 5y = 4. \end{cases}$$

96. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{3}{4} \\ x + y = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

97. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1 \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2. \end{cases}$$

98. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} 4(2x + 3y - 5) = \frac{5}{6}(x + 3) + \frac{2}{3}(y - 4) \\ x + y = 1. \end{cases}$$

99. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} 2x + y = 3\left(x - 5 - \frac{2}{3}y\right) \\ 5x - y = \frac{3}{4}(2 - x - y). \end{cases}$$

100. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = d. \end{cases}$$

101. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = d. \end{cases}$$

102. — **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2. \end{cases}$$

103. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (2+\lambda)x+(3+\lambda)y=1+\lambda \\ \lambda x+(5+\lambda)y=9+\lambda. \end{cases}$$

Discuter la solution obtenue suivant les valeurs de λ.

104. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a+\lambda)x+(b+\lambda)y=c+\lambda \\ (a'+\lambda)x+(b'+\lambda)y=c'+\lambda. \end{cases}$$

Discuter la solution obtenue suivant les valeurs de λ.

105. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=4 \\ x-y-3z=12. \end{cases}$$

106. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x-y-2z=\frac{3}{4} \\ x+y+z=0 \\ x-y-4z=1. \end{cases}$$

107. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+3y-z-t=1 \\ x-y+z+t=2 \\ x-y-z=6 \\ x+t=12. \end{cases}$$

108. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} y+z+t=20 \\ z+t+x=30 \\ t+x+y=40 \\ x+y+z=50. \end{cases}$$

Généraliser.

109. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ a^2x+b^2y+c^2z=m^2. \end{cases}$$

Généraliser.

110. — **Résoudre le système :**

$$bz - cy = \alpha$$
$$cz - ax = \beta$$
$$ax - by = \gamma.$$

On montrera qu'il est impossible en général et indéterminé si la somme $a\alpha + b\beta + c\gamma$ est nulle.

111. — **Résoudre le système :**

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} z\; ax + by + cz.$$

112. — **Résoudre les inégalités :**

$$2x - 3 > 3x - 5$$
$$3x - 8 > 5x - 4$$
$$x - 3 > 2x + \frac{3}{7}$$
$$-\frac{3}{4}x > 5x - \frac{5}{7}$$
$$-2x > -3x + \frac{2}{3}.$$

CHAPITRE VI

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

I. GÉNÉRALITÉS

71. **Choix des inconnues.** — Lorsque l'on veut résoudre un problème par l'algèbre, la première question que l'on doit se poser est relative au choix des inconnues. Elle se subdivise en plusieurs parties :

1° Quelles quantités prend-on comme inconnues?

2° Comment sont-elles définies en valeur absolue?

3° Comment sont-elles définies en signe?

Examinons successivement ces trois points.

1° Dans les questions élémentaires, l'énoncé indique généralement d'une manière assez claire par elle-même quelles inconnues il faut choisir; c'est surtout l'étude de nombreux exemples qui peut servir de guide pour choisir, dans certains cas, certaines inconnues de préférence à d'autres : il en résulte parfois des simplifications assez grandes.

2° Les quantités que l'on prend pour inconnues étant déterminées, il est essentiel de définir d'une manière précise de quelle manière on les repré-

sente par des nombres, puisque ce sont des nombres seulement qui figurent dans les formules de l'algèbre. Pour cela, il faut fixer d'une manière précise l'*unité* que l'on choisit; lorsqu'on aura trouvé la solution, qui sera un certain nombre, on devra se rappeler quelle unité a été choisie afin de connaître la signification de ce nombre. De plus, dans certains cas, il est nécessaire de fixer une *origine;* si l'inconnue est *un temps*, par exemple.

3° Dans bien des problèmes, les quantités inconnues sont de nature telle qu'on peut les considérer comme positives ou négatives; il est donc nécessaire, en même temps qu'on choisit une unité, de faire une convention précise relative au *signe* de chacune de ces quantités. On devra se rappeler cette convention, lorsqu'on aura obtenu la solution, de manière à en connaître la signification concrète précise.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Jean a 3 ans 6 mois et Pierre 18 mois; peut-il arriver que l'âge de Jean soit double de celui de Pierre? Il est assez naturel de prendre pour inconnue le temps qui sépare le moment actuel de l'époque où l'âge de Jean sera (ou a été) double de celui de Pierre. On prend donc comme origine des temps l'époque actuelle. De plus, on devra choisir une unité de temps; on prendra, soit le mois, soit l'année. Enfin, on devra indiquer si l'on compte les temps comme positifs vers le futur et négatifs vers le passé, ou inversement. On aura alors fait les conventions nécessaires pour pouvoir mettre le problème en équation et, cette équation résolue, discuter le résultat.

72. **Mise en équations.** — Mettre un problème en équations, c'est traduire algébriquement par des équations toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les inconnues, d'après l'énoncé. Ces conditions s'expriment par des relations entre les inconnues et les quantités données; il faut avoir grand soin, avant d'écrire ces relations, d'exprimer toutes les quantités de même nature avec la même unité et, s'il y a lieu, avec la même *origine* et les mêmes *conventions de signe*. Faute de prendre cette précaution essentielle, les équations écrites ne signifieraient rien et on ferait des erreurs très graves.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Deux voyageurs se déplacent sur la route de Paris à Lyon; ils sont tous deux entre Paris et Lyon, le premier est à 25^{km} *de Paris et le second à* 50^{km} *de Lyon; le premier se dirige vers Lyon avec une vitesse de* 30^{km} *à l'heure et le second se dirige vers Paris avec une vitesse de* 3^{m} *à la seconde; on demande au bout de combien de temps ils se rencontreront, sachant que la distance de Paris à Lyon est de* 500^{km}.

Nous prendrons comme inconnue le temps x qui s'écoule depuis l'époque actuelle jusqu'au moment de la rencontre; ce temps sera supposé compté positivement vers l'avenir et exprimé en *heures :* nous avons ainsi choisi une origine des temps, un sens positif pour les temps, et une unité de temps. Mais notre énoncé renferme aussi des longueurs; nous choisirons une origine des longueurs, par exemple Paris, un sens positif, par exemple le sens de Paris vers Lyon, et une unité de longueur, par exemple le kilomètre. Avec ces unités la position du pre-

mier voyageur est définie par le nombre $+25$ et sa vitesse est $+30$; quant au second voyageur, sa position est définie par $500-50=450$ puisque Lyon est à 500^{km} de Paris et qu'il est à 50^{km} de Lyon vers Paris ; quant à sa vitesse, il faut remarquer que s'il parcourt 3^{m} en une seconde, il parcourt en une minute 3×60 et en une heure $3\times 60\times 60=10\,800$ mètres, c'est-à-dire $10^{km},8$; de plus, il se dirige de Lyon vers Paris, c'est-à-dire dans le sens négatif ; sa vitesse est donc $-10,8$.

Ces calculs préliminaires faits, la mise en équation est immédiate ; il suffit d'écrire qu'au bout du temps x les deux voyageurs sont au même point, c'est-à-dire que leurs distances à Paris sont égales ; or, d'après l'équation du mouvement uniforme, la distance du premier voyageur à Paris au bout du temps x est $25+30x$ et la distance du second $450-10,8x$; *l'équation du problème est donc :*

$$25+30x=450-10,8x.$$

La mise en équations d'un problème étant effectuée, il reste à résoudre la, ou *les* équations, ce que nous avons appris à faire dans le cas où ces équations sont du premier degré, et enfin à *discuter* les résultats ; nous allons indiquer ce qu'il faut entendre par là.

73. **Discussion des résultats**. — La résolution de l'équation ou *des* équations d'un problème est *déterminée*, *impossible* ou *indéterminée ;* dans le cas où elle est déterminée, elle conduit à des nombres qui peuvent être *positifs* ou *négatifs*, *entiers* ou *fractionnaires*, etc. Discuter le problème, *c'est examiner quelles conséquences on peut déduire de*

ces diverses circonstances au point de vue de la solution du problème.

Par exemple, supposons que la lettre x représente le nombre d'hommes présents dans une assemblée et que nous ayons trouvé $x = \frac{3}{4}$, ou bien $x = -12$; nous devrons en conclure que, si nous n'avons pas fait d'erreur de calcul, le problème proposé est *impossible*.

Nous montrerons sur des exemples comment on discute un problème; cette discussion est généralement très aisée dans le cas où les données sont numériques; elle est souvent plus longue lorsque ces données, ou quelques-unes d'entre elles, sont représentées par des lettres dont la valeur numérique n'est pas connue. Pour faire une discussion complète, il est alors nécessaire d'examiner successivement les diverses hypothèses que l'on peut faire sur le signe et la grandeur relative des données. Tout cela sera rendu plus clair par l'étude des exemples.

II. PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

74. **Définition.** — On dit qu'un problème est un problème du premier degré à une inconnue lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

Il importe d'observer que cette définition est moins précise qu'elle ne le paraît. Lorsqu'on donne un problème, en effet, le nombre des inconnues qu'il faut introduire pour le résoudre dépend par-

[illegible] uit. Par

[illegible] *si Pierre*
[illegible] *de plus*
[illegible] *boules?*
[illegible] e Pierre
[illegible] ait deux
[illegible] si l'on
[illegible] l'énoncé
[illegible] mbre de
[illegible] sible de

[illegible] pour le
[illegible] uivant :
[illegible] *on carré*
[illegible] *n carré*

[illegible] équation :

[illegible]

[illegible] prendre
[illegible] é ; si l'on
[illegible] premier

[illegible]

[illegible] herché a

[illegible] **er degré**
[illegible] *ère porte*
[illegible] *le compte*
[illegible] *mais elle*
[illegible] *e et rap-*

porte ainsi chez elle 1fr de plus qu'elle ne comptait en partant. Combien avait-elle d'œufs?

Désignons par x le nombre d'œufs qu'elle avait au départ; la somme que la fermière comptait rapporter chez elle sera désignée par $10x$, si nous choisissons le centime comme unité. L'énoncé nous apprend qu'elle vend $x-6$ œufs à 15 centimes, ce qui lui rapporte $(x-6)\,15$ et qu'elle obtient ainsi 1fr, c'est-à-dire 100 centimes de plus qu'elle ne comptait; l'équation du problème est donc :

$$(x-6)15 = 10x + 100.$$

On en conclut :

$$5x = 190$$
$$x = 38.$$

La réponse est donc : la fermière avait au départ 38 œufs. Il n'y a pas de discussion, cette solution convenant parfaitement à la question posée. Il est bon de vérifier le résultat; s'il ne satisfaisait pas aux conditions du problème, on devrait en conclure que l'on a fait quelque erreur et chercher à la découvrir.

On voit que 38 œufs à 10 centimes donnent 3fr,80; si l'on a 6 œufs de moins, c'est-à-dire 32, mais qu'on les vende 15 centimes, on obtient 4fr,80; c'est bien 1fr de plus; le résultat trouvé est donc exact.

Problème II. — *Un marchand de vin désire obtenir 100 litres de vin lui revenant à 0fr,50 le litre en mélangeant du vin qui lui coûte 0fr,35 le litre avec du vin qui lui coûte 0fr,95 le litre. Combien doit-il prendre de vin de chaque espèce?*

Désignons par x le nombre de litres de vin à

0,35; puisqu'il faut 100 litres en tout, le nombre de litres de vin à 0,95 est $100 - x$. Le prix total de revient des x litres à 0,35 et des $100 - x$ litres à 0,95 doit être égal au prix de 100 litres à 0,50, c'est-à-dire à 50^fr. On a donc l'équation :

$$0{,}35x + 0{,}95\,(100 - x) = 50,$$

dans laquelle on a eu soin d'exprimer toutes les valeurs en francs.

En réduisant, on obtient :

$$-0{,}60x = 50 - 95 = -45,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{-45}{-0{,}60} = \frac{450}{6} = 75.$$

Il faut donc prendre 75 litres à $0^{fr},35$ et, par suite, 25 litres à $0^{fr},95$.

Nous laissons à l'élève le soin de vérifier ce résultat.

Problème III. — *Un voleur s'est emparé d'une bicyclette et s'enfuit sur une route avec une vitesse de 20^{km} à l'heure; on s'en aperçoit 3 minutes après son départ et un bicycliste s'élance à sa poursuite avec une vitesse de 22^{km} à l'heure. Au bout de combien de temps le rattrapera-t-il?*

Désignons par x le temps cherché, exprimé en minutes, et compté à partir du moment où le voleur est parti; lorsque le bicycliste le rattrape, ils ont parcouru le même chemin, le premier ayant roulé pendant x minutes avec une vitesse de 20 à l'heure et le deuxième ayant roulé pendant $x - 3$ minutes avec une vitesse de 22 à l'heure. Comme le chemin

parcouru pendant une minute est 60 fois plus petit que le chemin parcouru pendant une heure, l'équation du problème sera :

$$\frac{20}{60}x = \frac{22}{60}(x - 3),$$

ou, en multipliant les deux membres par 30 :

$$10x = 11(x - 3),$$

d'où :

$$x = 33.$$

Le voleur est rattrapé 33 minutes après son départ. L'élève vérifiera ce résultat.

PROBLÈME IV. — *Un père a 40 ans et son fils en a 16; quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils ?*

Désignons par x le temps cherché, compté en années à partir de l'époque actuelle, et supposé positif dans l'avenir. A l'époque x, l'âge du père sera $40 + x$ et l'âge du fils $16 + x$; on doit donc avoir, d'après l'énoncé :

$$40 + x = 3(16 + x),$$

c'est-à-dire :

$$-2x = 8$$
$$x = -4.$$

DISCUSSION. — Nous trouvons comme solution un nombre négatif; or nous avons désigné par x un temps compté positivement dans l'avenir; nous devons en conclure que c'est *il y a 4 ans* que l'âge du père *était* triple de celui du fils. En effet, le père avait alors trente-six ans et le fils douze.

enté par
d'années
que celui

nombres
ner des

uivant la
out de x
Jacques

e de Jac-

onvienne
de plus
pour les
s.

Pour que la solution x existe, il faut que $m - 1$ ne soit pas nul. Si $m = 1$ et $a - mb \neq 0$, c'est-à-dire $a - b \neq 0$, le problème est impossible. On pouvait le prévoir, car si Paul et Jacques n'ont pas le même âge et si l'on demande à quelle époque ils auront le même âge, le problème est évidemment impossible. Nous avons dit que cette impossibilité se représentait par le symbole ∞ ; on peut interpréter ce symbole en remarquant qu'au bout d'un temps très long, leurs âges ne deviennent pas égaux, mais que cependant leur différence relative diminue ; si au lieu de deux personnes, dont la vie est très courte, nous considérons deux fossiles, dont l'un remonterait à cent millions d'années, et l'autre à cent millions d'années plus deux jours, on s'accordera pour dire, en langage ordinaire, qu'ils ont le même âge. Ce n'est pas rigoureusement exact, mais c'est d'autant moins inexact que cet âge est plus grand : telle est la signification de la solution ∞ que l'on trouve.

Si m était égal à 1, et en même temps a égal à b, l'équation serait indéterminée, et le problème aussi. Paul et Jacques ont actuellement le même âge ; à quel moment auront-ils encore le même âge ? A un moment quelconque, telle est évidemment la réponse.

Écartons maintenant le cas où m serait égal à 1 ; nous aurons à étudier successivement le cas où m est plus grand que 1 et le cas où m est plus petit que 1.

Si m est plus grand que 1, $m - 1$ est positif ; pour que les valeurs obtenues pour les âges de Paul et de Jacques soient positives, il faut et il

suffit que $a - b$ soit positif, c'est-à-dire que a soit plus grand que b. Quant à la valeur de x, elle est positive ou négative suivant que $a - mb$ est positif ou négatif; c'est-à-dire suivant que a est supérieur ou inférieur à mb. On peut traduire ainsi ces résultats en langage ordinaire : pour qu'il puisse arriver que l'âge de Paul soit m fois plus grand que l'âge de Jacques, m étant plus grand que 1, il est nécessaire que Paul soit plus âgé que Jacques; dans ce cas, suivant que l'âge de Paul est actuellement supérieur ou inférieur à m fois l'âge de Jacques, l'époque que l'on cherche sera future ou passée.

Si $a = b$, on trouve pour les âges de Paul et de Jacques 0; lorsque leur âge à tous deux était nul, on peut dire algébriquement que l'un d'eux était m fois plus âgé que l'autre, quel que soit m; mais cette solution ne présente aucun intérêt; on exprime quelquefois ce fait en disant qu'elle est *illusoire*.

On étudierait de la même manière le cas où m est inférieur à 1; mais on peut s'en dispenser, si l'on fait la remarque suivante : dire que l'âge de Paul doit être la moitié ou les $\frac{3}{4}$ de celui de Jacques, c'est dire que l'âge de Jacques doit être le double ou les $\frac{4}{3}$ de celui de Paul. Donc si m est inférieur à 1, il suffira de permuter dans l'énoncé les noms de Paul et de Jacques et de remplacer m par $\frac{1}{m}$ pour être ramené au cas déjà traité où m est supérieur à 1. Il est très important de s'habituer à faire des remarques de ce genre, qui souvent abrègent et simplifient beaucoup les discussions.

On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

HYPOTHÈSES SUR m	HYPOTHÈSES SUR a ET b	CONCLUSIONS
$m = 1$	$a \neq b$	Problème impossible.
	$a = b$	indéterminé.
$m > 1$	$a < b$	impossible.
	$a = b$	solution illusoire.
	$b < a < mb$	$x < 0$; 1 sol. dans le passé.
	$a = mb$	$x = 0$; 1 sol. au moment présent.
	$a > mb$	$x > 0$; 1 sol. dans l'avenir.
$m < 1$	$a > b$	impossible.
	$a = b$	solution illusoire.
	$mb < a < b$	$x < 0$; 1 sol. dans le passé.
	$a = mb$	$x = 0$; 1 sol. au moment présent.
	$a < mb$	$x > 0$; 1 sol. dans l'avenir.

III. PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

76. **Définition et remarques générales.** — On dit qu'un problème est du premier degré à plusieurs inconnues, lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'un système d'équations du premier

degré à plusieurs inconnues. Cette définition appelle des remarques analogues à celles que nous avons faites au n° 74. Le nombre des inconnues et le degré des équations dépendent parfois de la marche suivie pour la mise en équation; ils sont donc en partie arbitraires, de sorte que la définition ne doit pas être considérée comme absolument précise. En pratique cependant, il arrive, le plus souvent, que le nombre des inconnues et le degré des équations résultent immédiatement de l'énoncé.

Pour la mise en équations il y a lieu d'observer que, si le problème proposé est déterminé, ce qui a lieu en général, le nombre des équations devra être égal au nombre des inconnues : *l'énoncé doit permettre d'écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues* [1].

Au sujet du choix des inconnues, c'est surtout la pratique qui guide dans les cas où l'on peut hésiter; d'ailleurs s'il est souvent plus *commode* de prendre pour inconnues certaines quantités plutôt que d'autres, ce n'est pas *essentiel;* tout choix d'inconnues qui conduit à des équations du premier degré permet d'obtenir la solution, par des calculs plus ou moins longs.

77. **Exemples de problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.** PROBLÈME VI. — *On sait*

1. Il peut arriver qu'il permette d'en écrire davantage; le problème est alors impossible à moins que les équations ne soient pas *distinctes;* nous ne pouvons développer ce point ici; indiquons un exemple : *trouver deux nombres tels que leur somme soit* 8, *leur différence* 2, *et la différence de leurs doubles* 4; on a les équations $x + y = 8$; $x - y = 2$; $2x - 2y = 4$, dont la troisième est équivalente à la seconde; il suffit donc de conserver les deux premières.

que 6^m de drap et 5^m de doublure coûtent 41^fr; 8^m de drap et 6^m de doublure coûtent 54^fr; quel est le prix du mètre de drap et du mètre de doublure?

Soit x le prix du mètre de drap et y le prix du mètre de doublure, ces prix étant exprimés en francs. L'énoncé donne les équations :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 41 \\ 8x + 6y = 54. \end{cases}$$

La deuxième équation prend une forme plus simple si l'on divise tous les termes par 2 :

$$4x + 3y = 27.$$

On en tire :

$$y = \frac{27 - 4x}{3} = 9 - \frac{4}{3}x.$$

En portant cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$6x + 5\left(9 - \frac{4}{3}x\right) = 41$$

$$\left(6 - \frac{20}{3}\right)x = 41 - 45$$

$$\frac{-2}{3}x = -4$$

$$x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Ayant x, on a :

$$y = 9 - \frac{4}{3}x = 9 - 8 = 1.$$

Le prix du mètre de drap est 6^fr et le prix du mètre de doublure est 1^fr.

Problème VII. — *On suppose qu'un bicycliste a une vitesse de* 25^{km} *à l'heure en terrain plat, de* 15^{km} *à l'heure en montée, et de* 30^{km} *à l'heure en descente. Combien y a-t-il de plat, de montée et de descente sur une route de* 100^{km}*, sachant qu'il a mis* $4^h 24^m$ *pour la parcourir à l'aller et* $4^h 36^m$ *au retour ?*

Soit x le nombre de kilomètres de plat, y le nombre de kilomètres de montée, et z le nombre de kilomètres de descente, à l'*aller;* au retour la descente devient montée, et inversement. On a une première équation en exprimant que la longueur totale de la route est 100^{km} :

$$(1) \qquad x + y + z = 100.$$

On obtiendra deux autres équations en exprimant que le temps employé pour parcourir la route a été $4^h 24^m$, c'est-à-dire 264^m à l'aller et 276^m au retour. Pour parcourir x kilomètres avec une vitesse de 25^{km} à l'heure, il faut un nombre de minutes égal à $\frac{60x}{25}$; en additionnant les temps partiels obtenus de même, on a les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{60x}{25} + \frac{60y}{15} + \frac{60z}{30} = 264 \\ \frac{60x}{25} + \frac{60y}{30} + \frac{60z}{15} = 276 \end{cases}$$

qu'on peut écrire, plus simplement :

$$\begin{cases} (2) \quad \frac{12}{5}x + 4y + 2z = 264 \\ (3) \quad \frac{12}{5}x + 2y + 4z = 276. \end{cases}$$

Tirons de l'équation (1) la valeur de z :

$$(4) \qquad z = 100 - x - y$$

et portons-la dans les équations (2) et (3); il vient .

$$\begin{cases} \frac{12}{5}x + 4y + 2(100 - x - y) = 264 \\ \frac{12}{5}x + 2y + 4(100 - x - y) = 276, \end{cases}$$

ou, en simplifiant et changeant les signes de la seconde équation :

$$\begin{cases} (5) \qquad \frac{2}{5}x + 2y = 64 \\ (6) \qquad \frac{8}{5}x + 2y = 124. \end{cases}$$

L'équation (5) nous donne :

$$(7) \qquad y = 32 - \frac{1}{5}x,$$

et, en portant dans (6), on obtient successivement :

$$\frac{8}{5}x + 64 - \frac{2}{5}x = 124$$

$$\frac{6}{5}x = 60$$

$$x = 50.$$

L'équation (7) donne alors :

$$y = 32 - 10 = 22$$

et l'équation (4) :

$$z = 100 - 50 - 22 = 28.$$

Il y a donc, à l'aller, 50^{km} de plat, 22^{km} de montée et 28^{km} de descente.

PROBLÈME VIII. — *On dispose, pour l'éclairage d'une salle, de lampes à alcool semblables entre elles et de lampes à pétrole semblables entre elles. Si l'on allume 4 lampes à pétrole et 2 lampes à alcool la dépense par heure sera de 50 centimes; si l'on allume 2 lampes à pétrole et 6 lampes à alcool, la dépense par heure sera de 60 centimes. Combien dépense par heure chaque lampe à pétrole et chaque lampe à alcool?*

Soit x la dépense d'une lampe à pétrole et y la dépense d'une lampe à alcool, exprimées en centimes par heure. On aura :

$$4x + 2y = 50$$
$$2x + 6y = 60.$$

La première de ces équations donne :

$$y = 25 - 2x,$$

et la deuxième devient alors :

$$2x + 6(25 - 2x) = 60$$
$$-10x = -90$$
$$x = 9.$$

On a, par suite :

$$y = 25 - 2x = 7.$$

Les dépenses demandées sont de $0^{fr},09$ pour le pétrole et de $0^{fr},07$ pour l'alcool.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

113. — Deux courriers se déplacent sur un axe avec des vitesses v et w; à l'origine leurs abscisses sont a et b; on

demande au bout de combien de temps ils se rencontreront. Discuter.

Application : $a = 3^{km}$; $b = -500^{m}$; $v = -12^{km}$ à l'heure; $w = 12^{m}$ à la seconde.

114. — On paie pour deux billets de première classe et un de seconde classe, de Paris à Lyon, $153^{fr}40$; pour 1 billet de première classe et 2 de seconde classe, on paye $134^{fr},75$; quel est le prix du billet de première classe et du billet de seconde classe?

115. — Il a été fabriqué en France, pendant l'année 1900, 2 185 858 pièces d'or de 10^{fr} et de 20^{fr}, pour une valeur totale de $28\,012\,830^{fr}$. Combien a-t-on fabriqué de pièces de 10^{fr} et de pièces de 20^{fr}?

116. — On demande quelle est la valeur de la livre sterling et du shilling, sachant que 5 livres 2 sh. valent $128^{fr},62$ et que 2 livres 5 sh. valent $56^{fr},74$.

117. — On demande quel est le poids de la pièce de 10^{fr} en or et de la pièce de 5^{fr} en argent, sachant que 31 pièces de 10^{fr} et 36 pièces de 5^{fr} pèsent 1 kilogramme, tandis que 310 pièces de 10^{fr} et 40 pièces de 5^{fr} pèsent 2 kilogrammes.

118. — Effectuer le produit des deux trinomes en x :

$$ax^2 + bx + c \qquad x^2 + yx + z,$$

et déterminer y et z de manière que les coefficients de x^3 et de x soient nuls dans le produit.

119. — On multiplie $a^2 + 2a + 5$ par $a^2x + ay + z$; déterminer x, y et z de manière que dans le produit les coefficients de a^3, a^2, a soient tous égaux à 3?

120. — Étant donnés trois points A, B, C, sur un axe, déterminer un point M de cet axe tel que l'on ait :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = r.$$

Discuter.

Le nombre r s'appelle *rapport anharmonique* des quatre points A, B, C, M.

121. — On considère un trottoir roulant, tel que celui de l'Exposition de 1900, dont la longueur totale soit 6 kilomètres, et, sur ce trottoir, un promeneur qui, ainsi que le trottoir, se déplace d'un mouvement uniforme. Lorsque le promeneur

marche dans le même sens que le trottoir, il met 40 minutes pour revenir à son point de départ; s'il marche en sens inverse, il met 6 heures. Quelle est la vitesse du promeneur et la vitesse du trottoir?

122. — Un bassin est alimenté par 3 robinets; si l'on ouvre les 2 premiers, il se remplit en 3^h; si l'on ouvre le premier et le troisième, il se remplit en 5^h; si l'on ouvre les 3 il se remplit en 1^h40^m; sachant que la capacité du bassin est 135 mètres cubes, on demande combien chaque robinet débite de litres.

123. — On a déterminé les poids de carbone et d'hydrogène renfermés dans un mélange d'acétylène (C^2H^2) et de méthane (CH^4), ces poids sont *c* et *h*; déterminer les poids d'acétylène et de méthane renfermés dans le mélange. Discuter. [$C = 6 \quad H = 1$].

124. — On sait que le bronze des canons se compose de 9 parties de cuivre et 1 partie d'étain; le laiton de 2 parties de cuivre et 1 de zinc; les monnaies de bronze, de 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. Un mélange de ces 3 alliages contient 5690^{gr} de cuivre, 150^{gr} d'étain et 130^{gr} de zinc; quels sont les poids des divers alliages qui forment le mélange?

CHAPITRE VII

VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ ; REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

I. VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ

78. — On appelle binome du premier degré l'expression $ax + b$, dans laquelle a et b sont des nombres considérés comme connus, x étant une *variable*. Étudier la variation de ce binome, c'est chercher comment il varie lorsque la variable x prend toutes les valeurs possibles. Nous désignerons la valeur du binome par y, ce que nous exprimerons en écrivant :

$$y = ax + b.$$

Cette relation, dans laquelle a et b sont considérés comme des nombres donnés, fait correspondre à chaque valeur de la variable x une valeur de la variable y; lorsque la variable x prend une valeur déterminée, la variable y prend aussi une valeur déterminée. On exprime cette dépendance entre x et y en disant que y est une *fonction* de x. Il existe des fonctions très compliquées, c'est-à-dire des lois

uelles une
variable x
es Mathé-
nction y
des plus
ous ver-
on.

donnant
s valeurs
e rendra

nction y

et x_2 et
ondantes

eurs de y
des deux
re. Il en
sera plus
grand ou
en disant
y décroît.
fonction

Définition. — *On dit qu'une fonction y est une fonction croissante de x, lorsque, si l'on fait croître x, c'est-à-dire si l'on donne à x des valeurs plus grandes, y croît aussi, c'est-à-dire prend des valeurs plus grandes.* Cette définition sera complétée plus loin (n° 105); nous verrons alors qu'il y a des fonctions qui sont croissantes pour certaines valeurs de x et pas pour d'autres; ici, il s'agit de fonctions *toujours croissantes*.

Soit maintenant la fonction :

$$y = -2x + 5.$$

En conservant les mêmes notations, on aura :

$$y_1 = -2x_1 + 5$$
$$y_2 = -2x_2 + 5$$
$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1).$$

La différence des deux valeurs de y est ici égale au produit par -2 de la différence des deux valeurs correspondantes de x, prises dans le même ordre. Donc si x_2 est supérieur à x_1, y_2 sera inférieur à y_1; si x croît, y décroît; si x décroît, y croît; la fonction y est dite *décroissante*.

Définition. — *On dit qu'une fonction y est une fonction décroissante de x lorsque, si l'on fait croître x, c'est-à-dire si l'on donne à x des valeurs plus grandes, y décroît, c'est-à-dire prend des valeurs plus petites.* Cette définition sera, comme celle des fonctions croissantes, complétée plus loin; mais elle nous suffit pour l'instant, car les fonctions que nous étudions sont, ou *toujours croissantes*, ou *toujours décroissantes*, ou *constantes*, c'est-à-dire indépen-

dantes de x. On peut, en effet, conclure de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *La fonction linéaire de x définie par la relation :*

$$y = ax + b,$$

est toujours croissante lorsque le coefficient a est positif, toujours décroissante lorsque le coefficient a est négatif, constante lorsque le coefficient a est nul.

Les deux premières parties de ce théorème résultent de la formule :

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

qui montre que $y_2 - y_1$ est de même signe que $x_2 - x_1$, ou de signe contraire, suivant que a est positif ou négatif; la troisième partie est évidente, car si l'on suppose $a = 0$, on a *constamment*, c'est-à-dire quel que soit x, la relation $y = b$.

79. — Nous allons maintenant étudier comment varie y lorsque l'on donne successivement à x toutes les valeurs possibles, positives ou négatives, ce que l'on exprime brièvement en disant que *l'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$*. Faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$ c'est supposer d'abord x très grand en valeur absolue et négatif, et considérer successivement des valeurs de x algébriquement de plus en plus grandes, jusqu'à ce qu'on soit amené à des valeurs très grandes positives.

Ainsi, on supposera successivement, par exemple, que x prend les valeurs :

$$-100000, \quad -1000, \quad -1, \; 0, \; 10, \; 1000, \; 100000,$$

et aussi les valeurs intermédiaires.

Il importe de remarquer que l'expression *valeurs très*

grandes n'a, par elle-même, aucun sens; une longueur de 20 kilomètres est très grande si on la compare aux dimensions d'une feuille de papier; elle est très petite si on la compare aux dimensions du globe terrestre; une longueur d'un million de kilomètres est elle-même très petite si on la compare aux distances des étoiles. Il faut donc entendre *très grandes* par rapport aux autres quantités que l'on considère, c'est-à-dire, dans la question qui nous occupe, par rapport aux coefficients a et b.

80. — Lorsque x est très grand en valeur absolue, y est aussi très grand en valeur absolue; si a est positif, y a le même signe que x; si a est négatif, y a un signe opposé à celui de x. En effet, soit, par exemple :

$$y = 2x + 500.$$

Si $x = -10$, $y = 480$; y est positif, à cause du terme positif 500; si $x = -100$, $y = 300$, c'est-à-dire est encore positif; mais si $x = -100\,000$, $y = -200\,000 + 500 = -199\,500$; le terme positif 500 n'empêche plus y d'être très grand en valeur absolue et négatif. De même, si l'on a :

$$y = -3x + 5000,$$

et si $x = 1\,000\,000$, $y = -3\,000\,000 + 5000 = -2\,995\,000$. On exprime ce fait d'une manière abrégée de la manière suivante :

Théorème. — *Lorsque a est positif, y est égal à $+\infty$ pour $x = +\infty$ et à $-\infty$ pour $x = -\infty$; lorsque a est négatif, y est égal à $-\infty$ pour $x = +\infty$ et à $+\infty$ pour $x = -\infty$.*

Lorsque a est différent de zéro, y est égal à zéro lorsque l'on a :

$$ax + b = 0,$$

ule pour

x par x',

u binome
ul; x est
de cette
que y est
ment dans

éléments
variations

our fixer

orsque x
valeurs
s en plus

petite; pour $x=0$, $y=-5$; pour $x=\frac{5}{2}$, $y=0$; lorsque x croît à partir de $\frac{5}{2}$, y continue à croître et prend, par suite, des valeurs positives de plus en plus grandes; enfin, pour $x=+\infty$, $y=+\infty$. On peut résumer ces remarques dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	négatif; croît	-5	négatif; croît	0	positif; croît	$+\infty$

On a indiqué sur une première ligne les valeurs *remarquables* de x, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles il se produit une circonstance particulière, que l'on juge digne de fixer l'attention. Ces valeurs remarquables sont rangées en ordre croissant; on a inscrit au-dessous de chacune d'elles la valeur correspondante de y; et, dans les intervalles qui séparent ces dernières valeurs, on a mentionné brièvement la manière dont se comporte y lorsque x parcourt en croissant l'intervalle situé au-dessus.

82. — Considérons encore la fonction :

$$y=-\frac{3}{2}x-1.$$

Les valeurs remarquables de x seront ici $-\infty$, $-\frac{2}{3}$, qui annule y, 0 qui donne à y la valeur -1, et $+\infty$; de plus y est décroissant, puisque le

tableau

[illegible]	$+\infty$
[illegible]	$-\infty$

ions du
de de la
exposer.

APHIQUE.

upposons
la tem-
du mois
mpagne.
momètre,
noterons
n degrés
rmomètre
s faisons
rons ainsi
:

8°
7°
5°,5
6°
5°,5
5°

et de se
pérature ;

on peut, en les examinant avec attention, voir, par exemple, que c'est à 2^h que la température a été la plus élevée, qu'elle a peu diminué entre 2^h et 4^h, mais qu'elle a diminué bien plus entre 4^h et 5^h et surtout entre 5^h et 6^h et entre 6^h et 7^h, etc. Mais ces diverses remarques seront rendues bien plus

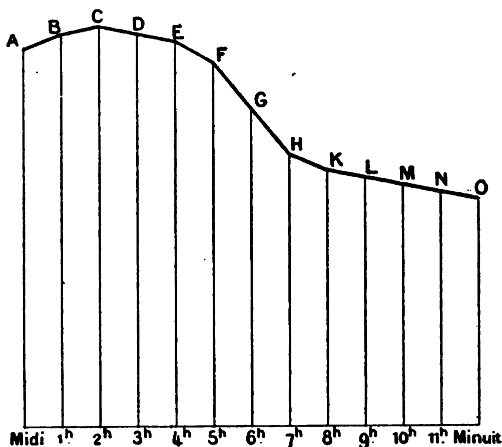


Fig. 13.

aisées à faire si l'on construit, à l'aide des nombres relevés sur le carnet un *graphique de la température*. — Voici ce que l'on entend par là.

Traçons (fig. 13) une ligne horizontale sur laquelle nous marquerons des points équidistants, qui correspondront aux heures successives : midi, 1^h, 2^h, etc., jusqu'à minuit. En chacun de ces points élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur proportionnelle à la température observée à l'heure indiquée. Par exemple, si nous

perpendi-
pour lon-
élevée au
52mm, etc.
BCDE... ;
t par une
ne brisée
rature. Il
gne pour
varié la
oit que C
2h qu'il a
t presque
donc peu
contraire
ées ; entre
ade varia-
sque, etc.
n du gra-
cture des

r obtenir
re d'heure
nt un gra-
les quarts
s minutes.
lus grand ;
nombre de
approchés

thermomè-
mécanisme
arquent à

chaque instant sur une feuille de papier convenablement disposée le point A qui représente la température à cet instant. La feuille de papier est d'ailleurs entraînée par un mouvement d'horlogerie, de telle manière qu'à midi, c'est le point A qui est marqué, à 1ʰ c'est le point B, à 2ʰ le point C, et à

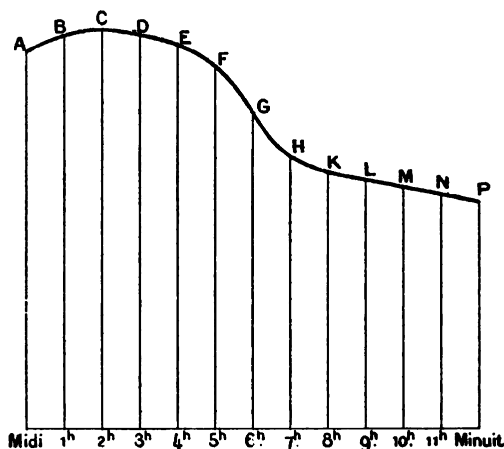


Fig. 14.

chaque instant le point correspondant à cet instant. L'ensemble de ces points forme une courbe continue (fig. 14), qui fournit la *représentation graphique complète des variations de la température.*

On peut résumer la marche suivie par la règle suivante, dans laquelle nous la précisons et définissons quelques termes utiles.

Règle. — *Pour représenter graphiquement les variations de la température, on trace* (fig. 15) *un axe ox sur lequel on représente les temps par des*

longueurs proportionnelles. Dans ce but, on fixe une unité de longueur et une unité de temps, une origine o des abscisses, et une origine des temps; un instant quelconque est alors représenté par le point dont l'abscisse est égale à l'époque de cet instant (n° 33). Par exemple, si l'unité de longueur choisie est le centimètre et l'unité de temps l'heure, on représente 1^h45^m *par un point A tel que* $OA = 1^{cm},75$*, l'origine des temps étant midi.*

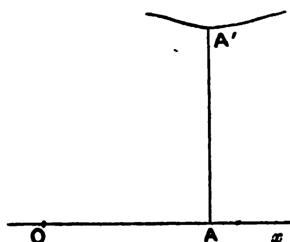


Fig. 15.

Ceci fait, en chaque point A on élève une perpendiculaire AA' à l'axe des abscisses et on porte sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle à la température. Pour cela, on fixe une unité de température et une unité de longueur (qui pourrait ne plus être la même que tout à l'heure) et on détermine le point A' par la condition que la mesure de AA' soit égale au nombre qui mesure la température avec l'unité choisie.

On n'a plus qu'à joindre par un trait continu tous les points tels que A' ainsi obtenus, pour avoir le graphique de la température.

Le segment OA s'appelle *abscisse*, et le segment AA' *ordonnée* du point A'; comme nous l'avons dit, on pourrait prendre, pour mesurer ces deux segments, des unités de longueurs différentes; *pour plus de simplicité, on choisit cependant en général la même unité, et c'est ce que nous ferons désormais.* Si cette unité est le centimètre, le segment OA

représente un temps dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure OA et le segment AA′ représente une température dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure AA′.

85. **Abscisses et ordonnées positives et négatives.** — Supposons que la température soit *au-dessous de zéro*, c'est-à-dire mesurée par un nombre négatif; il sera alors naturel de la représenter par une ordonnée *au-dessous de ox* et non plus au-dessus. Supposons, par exemple, que les températures relevées pendant une nuit d'hiver soient les suivantes :

6^h soir	+ 3°	1^h matin	— 6°,7
7^h soir	+ 2°1	2^h matin	— 7°,5
8^h soir	+ 1°	3^h matin	— 8°,2
9^h soir	— 0°,9	4^h matin	— 8°,7
10^h soir	— 2°,5	5^h matin	— 8°,9
11^h soir	— 4°2	6^h matin	— 9°
minuit	— 5°,6		

le graphique de la température sera le suivant (fig. 16), dans lequel on a représenté par une abscisse de 5^{mm} *une heure* et par une ordonnée de 5^{mm} *un degré*.

De même, si l'on suppose que l'origine des temps soit minuit, on voit qu'une époque postérieure à minuit, telle que 3^h du matin, est représentée par une abscisse égale à + 3, l'origine des abscisses étant le point O qui correspond à minuit, tandis qu'une époque antérieure à minuit, par exemple 10^h du soir, est représentée par une abscisse égale à — 2. Nous allons préciser ceci en définissant, d'une manière générale, le système de coordonnées que

l'on appelle cartésiennes, du nom de leur inventeur Descartes [1] (en latin *Cartesius*).

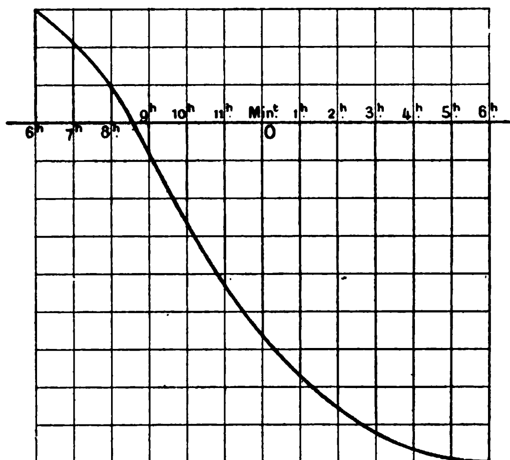


Fig. 16.

86. **Définition générale des coordonnées cartésiennes.** — Considérons deux axes *ox*, *oy* perpendiculaires l'un à l'autre; ou, comme on dit plus brièvement, *deux axes rectangulaires*, et soit M un point situé dans l'angle *xoy* formé par les directions positives des deux axes (fig. 17). Abaissons du point M les perpendiculaires MA et MB sur les axes; le quadrilatère OAMB est un *rectangle*. Mesurons les côtés de ce rectangle avec une unité de longueur préalablement choisie; sur la figure,

1. Célèbre philosophe et mathématicien français, qui vivait au XVIIe siècle.

l'on a :

$$OA = BM = 3$$
$$OB = AM = 4{,}5.$$

Le nombre 3 sera dit l'*abscisse* de M et le nombre 4,5 son *ordonnée;* les deux nombres 3 et

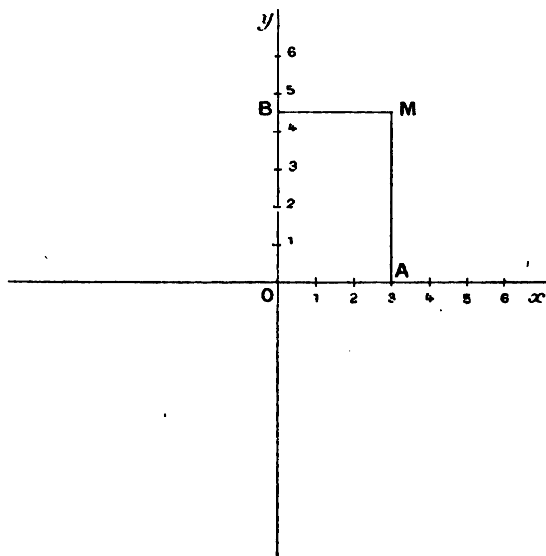


Fig. 17.

4,5 sont les *deux coordonnées* de M, c'est-à-dire les deux nombres qui servent à fixer la position de M dans le plan ; les axes *ox* et *oy* sont les *axes de coordonnées; ox* est l'*axe des abscisses* et *oy* l'*axe des ordonnées*. Le point O est l'*origine des coordonnées;* c'est à la fois l'origine des abscisses et l'origine des ordonnées.

s P, Q, R
ment les
l'un de
ère; par
le rec-

6 x

nt égales
est-à-dire
st dirigé
ositif. De
Q a pour
et que le

point R a pour abscisse 3 et pour ordonnée — 2,5. En résumé on a la règle suivante.

RÈGLE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires ox et oy, les coordonnées d'un point* M *du plan sont définies comme il suit : abaissons du point* M *la perpendiculaire* MA *sur ox et la perpendiculaire* MB *sur oy; l'abscisse de* M *est égale, en grandeur et en signe, au segment* OA *de l'axe des abscisses ox et l'ordonnée de* M *est égale, en grandeur et en signe, au segment* OB *de l'axe des ordonnées oy.*

Nous savons ainsi obtenir les coordonnées d'un point donné; il n'est pas moins important de savoir *construire un point dont les coordonnées sont données;* nous démontrerons à ce sujet le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux axes rectangulaires ox, oy, une unité de longueur, et deux nombres quelconques positifs ou négatifs, il existe un point et un seul admettant pour abscisse le premier de ces nombres et pour ordonnée le second; ce point s'obtient par la construction suivante : on prend sur ox un segment* OA *équivalent à l'abscisse donnée et sur oy un segment* OB *équivalent à l'ordonnée donnée; le point* M *cherché est le quatrième sommet du rectangle dont trois sommets coïncident avec les points* A, O, B.

En effet, le point M ainsi défini (fig. 17) a bien ses coordonnées égales aux nombres donnés, et il est le seul, car tout point dont l'abscisse est égale à OA et l'ordonnée à OB est tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur *ox* passe en A, c'est-à-dire coïncide avec MA, tandis que la perpendiculaire abaissée sur *oy* coïncide avec MB; le point cherché doit donc coïncider avec M.

n est bien
pour les
ions l'ab-
ositive ou
ndiculaire
nt que la
négative,
emarquée
l'identité

onnée est
point O
point B ;
zéro sont
des ordon-
est égale
cisses. Le
ordonnées

lettre x,
on a plu-
nguer, on
$y_2, y_3 \ldots$,
les deux
loie aussi
sses et la
sert aussi
b) et ξ, η

e est égale
on dira et
$y = -3$) ;
n d'écrire

d'abord l'abscisse et ensuite l'ordonnée, que l'on sépare par une virgule. Si l'on n'a pas jugé utile de désigner ce point par une lettre on pourra dire simplement : *le point* $x = 2$, $y = -3$; ou : *le point* $(2, -3)$.

III. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ

88. — Supposons que nous ayons plongé un thermomètre dans un vase rempli d'eau froide et rapproché d'un feu modéré; à chaque minute nous notons la température indiquée par le thermomètre et nous obtenons ainsi un tableau tel que le suivant :

Époque.	Température.	Époque.	Température.
—	—	—	—
0.	1°	3ᵐ	7°
1ᵐ	3°	4ᵐ	9°
2ᵐ	5°	5ᵐ	11°

Si nous convenons de désigner par x l'époque exprimée en minutes, et par y la température correspondante exprimée en degrés, l'inspection de ce tableau montre que l'on a :

$$y = 2x + 1,$$

lorsque x a l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. La température s'élève régulièrement de 2° par minute. Il est donc à présumer qu'en $\frac{1}{5}$ de minute par exemple, la température s'élève de $\frac{1}{5}$ de 2°, c'est-à-dire de $\frac{2}{5}$ de degré. Il en résulte qu'à l'époque $x = 3^{m}\frac{1}{5}$ la

de sorte
pérature

que cette
est véri-
r toutes
rs de x
s entre o
est-à-dire
e époque
entre les
extrêmes
observé.
rimerons
n disant
relation
loi des
tures pen-
ntervalle
étudié.
ons la re-
tion gra-
de la va-
nous tra-
ox, oy et
onsécutifs
oints 1, 2,
2, 3, 4,
ro. Nous
$oA = 1$,

$1B = 3$, $2C = 5$, $3D = 7$, $4E = 9$, $5F = 11$. Nous allons démontrer d'abord que les points ABCDEF sont en ligne droite. Dans ce but, menons par A la parallèle à *ox*, qui rencontre les ordonnées en B′, C′, D′, E′, F′; nous aurons :

$$AB' = 1, \quad AC' = 2, \quad AD' = 3, \quad AE' = 4, \quad AF' = 5.$$
$$B'B = 2 \quad C'C = 4 \quad D'D = 6 \quad E'E = 8 \quad F'F = 10$$

Les triangles rectangles AB′B, AC′C, AD′D, AE′E, AF′F sont donc semblables comme ayant les côtés de l'angle droit proportionnels; il en résulte que les droites AB, AC, AD, AE, AF font toutes le même angle avec AF′; donc ces droites coïncident, c'est-à-dire que les points A, B, C, D, E, F sont en ligne droite.

Nous allons maintenant faire voir que cette droite AF représente *complètement* la variation de la température dans l'intervalle considéré; c'est-à-dire que *si l'on considère une époque quelconque x, correspondant à l'abscisse* OP, *la température y à cette époque est égale à l'ordonnée* PM *que l'on obtient en élevant en* P *la perpendiculaire à ox et prenant son point d'intersection* M *avec* AF.

Soit, en effet, M′ le point d'intersection de PM avec AF′.

Le triangle AM′M est semblable au triangle AB′B; on a donc :

$$\frac{M'M}{AM'} = \frac{B'B}{AB'} = 2.$$

D'autre part :

$$PM = PM' + M'M$$
$$OP = AM'.$$

P par x :

npérature

tempéra-
ntée algé-
ré, elle est
ne droite;
ité que la
$x + b$ est
présentée

graphi-
y définie

— 1 à 2.
le tableau

point A
— B
— C
— D.

omme tout
ints A, B,
ncontre ox
$y = 0$; on

doit donc avoir, en désignant par x l'abscisse de M :

$$4 - 3x = 0$$
$$x = \frac{4}{3},$$

c'est ce que l'on vérifie facilement par la comparaison des triangles semblables MC1, MD2.

II. — *Représenter graphiquement la fonction y définie par la relation :*

$$y = -1 - \frac{2}{3}x,$$

lorsque x varie de — 3 à 2.

Nous formerons le tableau suivant :

$x = -3$	$y = -1 + 2 =$	1	point A
$x = -2$	$y = -1 + \frac{4}{3} =$	$\frac{1}{3}$	— B
$x = -1$	$y = -1 + \frac{2}{3} =$	$-\frac{1}{3}$	— C
$x = 0$	$y = -1$		— D
$x = 1$	$y = -1 - \frac{2}{3} =$	$-\frac{5}{3}$	— E
$x = 2$	$y = -1 - \frac{4}{3} =$	$-\frac{7}{3}$	— F.

Les points ABCDEF sont en ligne droite (fig. 21) et cette droite rencontre ox en un point M dont l'abscisse est $-\frac{3}{2}$; c'est la valeur de x pour laquelle y est égal à zéro.

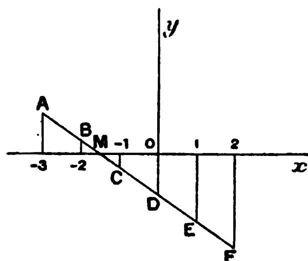


Fig. 21.

90. **Étude générale de la fonction linéaire.** — Nous allons maintenant

ations de
e — ∞ à
s valeurs

les varia-
nant à x
a valeur
construi-
sont les
éunissant
montrer
finie[1].
simple

y

ordonnée
u double
A′ corres-
u double
pond une
double de
I′, OA″M″
côtés de

re, les mots
ne qui n'est
le nom de
culier de la
culier de la

l'angle droit proportionnels :

$$\frac{AM}{OA} = \frac{A'M'}{OA'} = \frac{A''M''}{OA''} = 2.$$

Les angles MOA, M'OA', M''OA'' sont donc égaux, d'où il résulte que les points MM'M'' sont en ligne droite. Cette droite, supposée prolongée indéfiniment, représente complètement la fonction $y = 2x$;

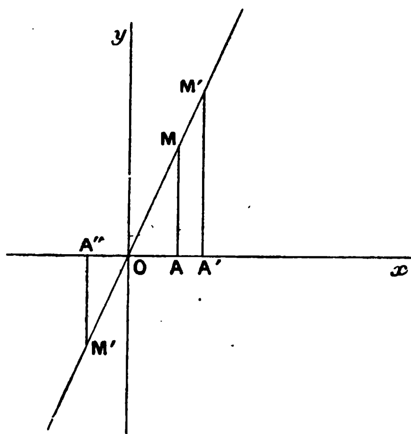


Fig. 22.

à tout système de valeurs correspondantes, x, y, correspond un point de la droite, et réciproquement les coordonnées d'un point quelconque de la droite vérifient la relation $y = 2x$. On dit que la relation $y = 2x$ est l'*équation de la droite* (au lieu de dire plus longuement : l'équation que vérifient les coordonnées d'un point quelconque de la droite). La droite MM' est *la droite d'équation* $y = 2x$; on dit aussi, plus brièvement : *la droite :* $y = 2x$.

générale :

3) et AM
née de la
$+3$ s'ob-
utant 3 à
e en pre-
ment MP
ns positif
du le sens
De même
corres-
nt M' de
$2x$ et un
a courbe
que M'P'
Les seg-
M'P' étant
lèles et de
la figure
un paral-
Le point P'
menée par
la courbe
urbe cher-

$= 2x + 3$
est OB et
amme. La
née à l'ori-
$+ 3$, il est
d'abord le

point B; par le point B on mène la parallèle à MM′.

On peut aussi construire le point C où la droite rencontre Ox; c'est le point pour lequel on a $2x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$. Les points B et C étant construits, il suffit de joindre BC pour avoir la droite cherchée.

91. Exemples. I. — *Construire la droite :*

$$y = -2x + 1.$$

On construira d'abord la droite $y = -2x$, et l'on remarquera que, pour cette droite y et x sont constamment de signes contraires; c'est la droite MM′ (fig. 24); la droite $y = 2x + 1$ est alors PP′, si l'on prend MP et M′P′ égaux à l'unité de longueur; l'ordonnée à l'origine OB est aussi égale à l'unité de longueur. Le point C d'intersection de la droite avec ox a pour abscisse $\frac{1}{2}$, car pour $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

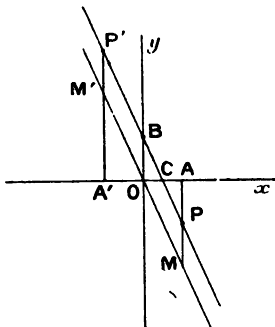


Fig. 24.

II. — *Construire la droite représentée par l'équation :*

$$y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

La droite parallèle est M′M (fig. 25); l'ordonnée à l'origine OB $= -2$; l'abscisse à l'origine OC $= -4$.

Remarque. — On voit que l'inclinaison de la

signe du

x

te raison,
nte de la
ngulaire.
fficient est
droite est
car si l'on
cela équi-
l'ordonnée
constante;
telle que

u le coef-
est posi-
décrois-
atif.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

125. — On a observé les températures suivantes :

Midi.	10°	4h.	8°
1h.	12°	5h.	5°
2h.	13°	6h.	4°
3h.	11°	7h.	3°

Représenter graphiquement la variation de température, en faisant correspondre 1^{cm} à 1^{h} et 1^{cm} à 1°.

126. — Effectuer la même représentation graphique, en faisant correspondre 2^{mm} à 1^{h} et 1^{mm} à 1°.

127. — Effectuer la même représentation graphique en faisant usage de papier quadrillé et faisant correspondre un côté du quadrillage à 1^{h} et un côté à 2°.

128. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = x + 1$$
$$y = 3x + 4$$
$$y = \frac{x}{2} - 3$$

en prenant comme unité le centimètre.

129. — Même question, en prenant pour unité le millimètre.

130. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$$
$$y = -x + \frac{2}{9}$$

en prenant pour unité le décimètre.

131. — Même question en prenant pour unité le centimètre.

[illegible] ons des fonc-

[illegible] droites :

[illegible] mesurer les
[illegible] ce du point
[illegible] ations.

[illegible] tentes en fai-
[illegible]

CHAPITRE VIII

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

I. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

92. **Définitions.** — Nous savons qu'on appelle équation du second degré à une inconnue x une équation telle que, tous les termes ayant été transposés dans le premier membre et les termes semblables ayant été réduits, le premier membre est un polynome du second degré en x. Telles sont les équations :

$$3 + 5x^2 - x = 0$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3}x - x^2 = 0$$

$$mx^2 - px + 3x^2 - 4 = 0$$

$$m - nx^2 + 2px - m^2 - p^4 = 0.$$

On a l'habitude d'ordonner le premier membre de l'équation suivant les puissances décroissantes de x, en réunissant en un seul tous les termes qui

ns précé-

s termes;
nd degré.
le second
me est le
tant. Par

nd terme
$m - n$.

et le der-
s'écrirait :

n'existe

du second

c'est-à-dire que l'on désigne par a le coefficient du premier terme, par b le coefficient du second terme, et par c le terme constant. Pour que l'équation soit bien du second degré, il est nécessaire de supposer que le coefficient a est différent de zéro; les coefficients b et c peuvent être nuls ou différents de zéro; nous étudierons d'abord le cas particulier où l'on a $b = 0$.

93. **Cas où le coefficient du second terme est nul.** — Soit l'équation du second degré :

$$2x^2 - 8 = 0.$$

On peut l'écrire successivement sous les formes équivalentes :

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4.$$

Il s'agit donc de trouver un nombre x dont le carré soit égal à 4. Nous savons que 2 est le seul nombre positif dont le carré est égal à 4; je dis que -2 est le seul nombre négatif dont le carré est égal à 4; en effet, a étant positif, le carré de $-a$ est égal au carré de a; il n'est donc égal à 4 que si $a^2 = 4$, c'est-à-dire si $a = 2$. L'équation proposée admet donc *deux solutions;* ou, comme on dit aussi, *deux racines :* la racine 2 et la racine -2.

Au lieu d'écrire :

$$x = +2$$

$$x = -2,$$

on écrit souvent la formule unique :

$$x = \pm 2,$$

ux; c'est-
soit égal

carré soit
seul dont
$\frac{5}{3}$ et l'on
ec autant
e négatif
carré soit

ux racines
unique :

ation, on

égal au

nombre négatif $-\frac{5}{2}$; or, le carré d'un nombre est toujours positif, que ce nombre soit positif ou négatif; *il n'y a donc aucun nombre dont le carré soit égal à* $-\frac{5}{2}$; on en conclut que *l'équation proposée n'a pas de racines.*

Soit enfin l'équation :

$$3x^2 = 0.$$

Le produit de x^2 par 3 étant nul, on doit avoir :

$$x^2 = 0,$$

et par suite $x = 0$, puisque 0 est le seul nombre dont le carré est égal à zéro. L'équation proposée admet donc la racine unique $x = 0$.

On convient de dire que cette racine est *double;* nous ne pouvons expliquer complètement la raison de cette dénomination; contentons-nous d'observer que, x^2 étant le produit de deux facteurs égaux à x, si x est égal à zéro, ces deux facteurs sont nuls, de sorte que le produit a *une double raison* pour s'annuler.

Nous pouvons résumer comme il suit l'étude que nous venons de faire.

Théorème. — *Soit :*

$$ax^2 + c = 0$$

une équation du second degré sans second terme, dans laquelle on suppose essentiellement $a \neq 0$. *Si les coefficients a et c sont de signes contraires, l'équation admet deux racines données par la*

formule

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}},$$

dans laquelle $\frac{-c}{a}$ *est un nombre positif dont l'arithmétique enseigne à extraire la racine carrée. Si les coefficients c et a sont de même signe, l'équation n'a pas de racines. Si le coefficient c est nul, l'équation admet la racine double* $x = 0$.

94. **Résolution de l'équation générale.** — Considérons maintenant l'équation générale

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

dans laquelle nous supposons essentiellement le coefficient a différent de zéro, sans faire aucune autre hypothèse.

L'équation (1) est équivalente à l'équation suivante, obtenue en multipliant les deux membres par $4a$:

$$(2) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

ou, en ajoutant b^2 aux deux membres :

$$(3) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Le succès de la méthode employée tient à ce que le premier membre de l'équation (3) est le carré de $2ax + b$; de telle sorte que cette équation (3) peut s'écrire :

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

On est ainsi conduit à un problème tout à fait analogue à celui que nous avons résolu dans le précédent paragraphe ; il s'agit de déterminer x, sachant que le carré de l'expression $2ax + b$ est égal à $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac$ est positif, $2ax + b$ devra être égal à $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$; si $b^2 - 4ac$ est négatif, le problème est impossible ; si $b^2 - 4ac$ est nul, $2ax + b$ doit être nul. On a donc, en supposant $b^2 - 4ac > 0$,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette dernière formule fait connaître les deux racines de l'équation du second degré au moyen des coefficients ; ces racines sont distinctes si $b^2 - 4ac$ est positif ; elles sont *égales* si $b^2 - 4ac = 0$; il n'y a alors qu'*une* racine, que l'on considère comme *double* ; enfin si $b^2 - 4ac$ est négatif, les racines n'existent pas ; la formule qui les donne n'a plus de sens, puisque l'on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.

Applications. I. — Résoudre l'équation :

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

On peut appliquer la formule, en remplaçant a par 2, b par -5 et c par 3 ; on obtient ainsi :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}.$$

Les deux racines sont donc :

$$\frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

et

$$\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

On aurait pu, à titre d'exercice, appliquer à l'équation particulière proposée la méthode générale qui a servi à établir la formule; multiplions par $4a$, c'est-à-dire par 8; il vient :

$$16x^2 - 40x = -24.$$

Ajoutons b^2, c'est-à-dire 25; il vient :

$$16x^2 - 40x + 25 = 25 - 24$$
$$(4x-5)^2 = 1$$
$$4x - 5 = \pm 1$$
$$4x = 5 \pm 1,$$

d'où l'on tire les mêmes valeurs pour les racines.

II. — Résoudre l'équation :

$$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times \frac{16}{3} = 0.$$

L'équation a donc une racine double :

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

III. — Résoudre l'équation :

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16;$$

l'équation proposée n'a pas de racines.

95. **Cas où la formule se simplifie.** — Dans le

cas où le coefficient b est le double d'un nombre entier, il est commode de poser $b = 2b'$, b' désignant la moitié de b; la formule devient alors, en remarquant que le carré du double d'un nombre est égal au quadruple de ce nombre :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Indiquons aussi la formule suivante, souvent utile. L'équation du second degré étant donnée sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0,$$

on l'écrit :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{p^2}{4} - q > 0$:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

c'est-à-dire :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

II. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

96. **Formation d'une équation ayant deux racines données.** — Désignons par x' et x'' deux

mer une
cines les
réponse
but, dési-
ul et con-

; d'autre
$x - x'$,
ces fac-
zéro, il
$x = x'$,
$x = x''$.
onc pour
d'autres
sque l'on
dmet au

$a = 6$,
rs; nous

$a = 2$;

nous aurons l'équation :

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0,$$

c'est-à-dire :

$$2x^2+5x-3=0.$$

97. — Reprenons l'équation générale :

$$a(x-x')(x-x'')=0.$$

Si nous la développons, nous obtenons :

$$ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''=0.$$

Les coefficients sont : a, $-a(x'+x'')$, $ax'x''$, d'où la règle suivante.

Règle. — *Pour former une équation du second degré admettant pour racines les nombres x' et x'', on prend arbitrairement le premier coefficient a ; le second coefficient est égal au produit de — a par la somme des racines $x'+x''$ et le dernier coefficient est égal au produit de a par le produit des racines $x'x''$.*

Dans le cas particulier où $x'=x''$, l'équation que l'on obtient est :

$$a(x-x')^2=0$$
$$ax^2-2ax'x+ax'^2=0,$$

et l'on constate aisément qu'elle admet la racine *double* $x=x'$; cette racine est regardée comme double parce qu'elle annule *doublement* l'expression $a(x-x')^2$, vu qu'elle annule les *deux* facteurs $x-x'$ de cette expression.

98. **Relations entre les coefficients et les racines.** — Nous allons démontrer que, réciproque-

ment, si l'on donne *a priori* une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

admettant des racines x' et x'', les coefficients b et c sont donnés par les formules :

$$b = -a(x' + x'')$$
$$c = ax'x''.$$

Ceci revient à dire que l'équation donnée est identique avec l'équation que nous savons former ayant même premier coefficient a et ayant les mêmes racines x' et x''.

La vérification est facile ; on a :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

d'où, immédiatement :

$$a(x' + x'') = -b.$$

On a d'ailleurs :

$$x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

La vérification est donc complète ; elle subsiste dans le cas où $x' = x''$, c'est-à-dire où $b^2 - 4ac$ est nul.

On en conclut que *deux équations du second degré ayant les mêmes racines ont leurs coefficients*

proportionnels; car, si l'on désigne par a', b', c', les coefficients d'une autre équation ayant aussi pour racines x' et x'', on a :

$$b' = -a'(x' + x'')$$
$$c' = a'x'x'',$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Réciproquement, si deux équations ont les coefficients proportionnels, elles ont les mêmes racines.

99. **Signes des racines.** — Les relations entre les coefficients et les racines peuvent s'écrire :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

ce qui s'énonce ainsi :

THÉORÈME. — *Lorsqu'une équation du second degré admet des racines, la somme de ces racines est égale au quotient changé de signe du second coefficient par le premier; le produit de ces racines est égal au quotient du dernier coefficient par le premier.*

On peut déduire de là une règle permettant d'obtenir le signe des racines sans résoudre l'équation. En effet, si le produit des racines est négatif, on peut en conclure que l'une est positive et l'autre négative; si le produit est positif, les deux racines sont de même signe; elles sont toutes deux positives ou toutes deux négatives suivant que leur somme est positive ou négative.

Mais il ne faut pas oublier, avant de rechercher

d que ces
est positif
faire l'im-
où $\frac{c}{a}$ est
d'où l'on
ésulte que
et $-4ac$
e que la
peut être

égative.

es positives

s négatives

$-\frac{b}{2a}$

blème est
résolution
ations du
uivie de la
ier degré.

Nous ne considérerons ici que les problèmes pour lesquels il suffira de résoudre *une seule* équation du second degré à une inconnue et, le plus souvent même, il n'y aura pas de système auxiliaire du premier degré.

A propos de cette définition, on pourrait répéter les remarques que nous avons faites sur la définition des problèmes du premier degré.

102. **Mise en équation. Discussion.** — Au sujet de la mise en équation, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit pour les problèmes du premier degré ; mais quelques remarques nouvelles doivent être faites pour la discussion.

Trois circonstances, en effet, se présentent pour le second degré qui ne se présentaient jamais pour le premier : 1° *il peut ne pas y avoir de racines;* 2° il y a fréquemment *deux racines;* l'une peut convenir au problème et non pas l'autre; il peut arriver que ces deux racines donnent deux solutions différentes du problème et il peut arriver aussi que ces racines, quoique différentes, conduisent à la même solution du problème (voir, plus loin, Problèmes); 3° enfin, il peut y avoir *une racine double;* nous verrons (Problème IV) quelle grande importance peut avoir cette circonstance dans la discussion.

Dans la discussion des problèmes du premier degré, il pouvait arriver que la solution disparaisse en devenant infinie; c'est ce qui se produit lorsque, dans l'équation

$$ax + b = 0,$$

le coefficient a devient nul. De même, si dans l'équa-

ît, l'équa-
plus que
e? Comme

nfinie, on

sparu est
nerait une
eux coef-
ît, l'équa-
mie de x;
ne double
sont nuls
l que soit
à indiquer
donner ici
complète-

nd degré.
égaux res-
en doit-on
diminuant
ngueur, la

cherchée,
nt respecti-
f, on aura
et diminué
raire, mais
sont satis-

faites. La surface d'un rectangle exprimée en mètres carrés est égale au produit des côtés exprimés en mètres; on doit donc avoir :

$$(4+x)(7-x)=24,$$

c'est-à-dire :

$$x^2-3x-4=0,$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

On a les deux racines :

$$x'=\frac{8}{2}=4$$

$$x''=\frac{-2}{2}=-1.$$

La première donne pour côtés $4+4$ et $7-4$, c'est-à-dire 8 et 3; la seconde donne $4-1$ et $7+1$, c'est-à-dire 3 et 8. On a donc deux solutions du problème proposé, mais ces solutions conduisent à deux rectangles égaux, dont les côtés sont simplement permutés. Cela tient à ce que le problème proposé revient à ceci : puisque l'on diminue l'un des côtés et qu'on augmente l'autre de la même longueur, leur somme reste constante et égale à 11; il s'agit donc de trouver un rectangle connaissant la surface et la moitié du périmètre; nous allons résoudre ce problème et voir qu'il y a un seul rectangle répondant à la question.

Problème II. — *Quels sont les côtés d'un rectangle dont la surface est 30 mètres carrés et le périmètre 22 mètres ?*

primés en
la surface

s x' et x''
Pour cela,
les coef-
qui admet

e :

prendre,

x solutions
eurs côtés

es dont la

précédent ;

dans ce but, nous remarquerons que la différence de deux nombres est égale à la somme du premier et d'un nombre opposé au second ; nous sommes ainsi conduits à désigner le premier nombre par x' et le second par $-x''$; leur différence est alors $x'+x''$ et leur produit est $-x'x''$; on a ainsi les deux équations :

$$x'+x''=3$$
$$x'x''=-40.$$

Donc x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2-3x-40=0,$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+40}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}.$$

Les deux racines sont 8 et -5; on peut prendre :

$$x'=8$$
$$x''=-5,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont 8 et 5. On peut prendre aussi :

$$x'=-5$$
$$x''=+8,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont -5 et -8. On a ainsi deux solutions à la question posée.

Problème IV. — *Construire un rectangle, sachant que la somme de sa base et de sa hauteur est $2m$ et que sa surface est équivalente à celle d'un carré de côté d. Les longueurs m et d sont supposées mesurées avec la même unité.*

Désignons par x' et x'' les côtés du rectangle, mesurés avec l'unité choisie ; on aura :

$$x' + x'' = 2m$$
$$x'x'' = d^2,$$

de sorte que x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 2mx + d^2 = 0$$

d'où l'on tire :

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - d^2}.$$

Discussion. — Pour que la formule soit acceptable, il est nécessaire que l'on ait $m^2 - d^2 \geqq 0$, c'est-à-dire $m^2 \geqq d^2$. Comme les nombres m et d sont positifs, cette condition équivaut à $m \geqq d$, car le carré d'un nombre positif est d'autant plus grand que ce nombre lui-même est plus grand. Le problème proposé n'est donc possible que si la somme $2m$ de la base et de la hauteur du rectangle cherché est supérieure à la somme $2d$ de deux côtés du carré; en d'autres termes, si le périmètre $4m$ du rectangle cherché est supérieur au périmètre $4d$ du carré donné.

Nous pouvons exprimer cette condition sous la forme suivante : *pour qu'il soit possible de construire un rectangle de périmètre donné équivalent à un carré donné, il faut et il suffit que le périmètre donné soit supérieur au périmètre du carré.*

Dans le cas où le périmètre donné pour le rectangle est *égal* au périmètre du carré, on trouve $x' = x'' = d$, c'est-à-dire qu'une solution est fournie par le carré lui-même, ce que l'on pouvait prévoir, et que c'est *la seule.* L'équation du second degré a

une racine double; on peut dire qu'à cette racine correspond *une solution double;* en effet, lorsque m est supérieur à d, nous pouvons dire qu'il y a deux rectangles répondant à la question; l'un de base x' et de hauteur x'', l'autre de base x'' et de hauteur x' (ces deux rectangles sont d'ailleurs égaux); lorsque x' devient égal à x'', chacun de ces rectangles devient un carré, qui apparaît ainsi comme *solution double.*

Cette solution double a une propriété très importante, qui appartient très fréquemment aux solutions doubles : elle fait connaître le rectangle dont le périmètre est le plus petit parmi tous les rectangles de même surface. Il résulte en effet de la discussion précédente que, la surface d^2 étant donnée, le périmètre $4m$ ne peut pas être inférieur à $4d$; car si $m < d$, il n'y a pas de solution au problème posé; *la plus petite valeur de* $4m$ *est donc* $4d$; c'est le périmètre du carré.

On peut se placer à un autre point de vue, en regardant m comme fixe et d comme variable; alors d doit être inférieur ou au plus égal à m; *sa plus grande valeur est* m; parmi tous les rectangles de même périmètre $4m$, celui dont la surface est la plus grande est le carré de côté m.

Ainsi, si l'on dispose d'une clôture en fil de fer d'une certaine longueur et que l'on veuille s'en servir pour borner un terrain rectangulaire *aussi grand que possible*, on devra donner à ce terrain la forme d'un carré.

II

é admettant

é admettant

é admettant

l'équation :

valeurs de a

emande quel

est le côté de ce carré, sachant que si l'on ajoute 2^m à l'un des côtés et que l'on retranche 10^m à l'autre côté, on obtient un rectangle dont la superficie est 88 ares.

145. — On donne un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit ont respectivement pour longueurs 3^m et 4^m; déterminer sur l'hypoténuse un point dont la distance au sommet de l'angle droit soit égale à 6^m. On prendra pour inconnue x la distance du point cherché au sommet du triangle opposé au côté égal à 4^m.

146. — Trouver les côtés d'un triangle rectangle sachant que l'hypoténuse est égale à 13^m et la surface à 30 mètres carrés.

147. — Quelle valeur faut-il donner à t pour que le système :

$$(3+t)x + 4y = 5 - 3t$$
$$2x + (5+t)y = 8$$

soit impossible ou indéterminé?

148. — Étant donnée la longueur d'un côté d'un triangle, de la hauteur correspondante, et le rayon du cercle inscrit, calculer les longueurs des deux autres côtés. Discuter.

149. — On donne le cercle circonscrit à un triangle, un côté et la somme des deux autres; calculer ces deux autres côtés. Discuter.

ONCTIONS

itre VII,
er degré
ique; de
egré doit
fonction
e ferons
u second
ous nous
ers sim-
trinome
que l'on
veut pas
us allons
nt même
à 1.

ion gra-
les varia-

tions de la fonction y définie par l'équation :

$$(1) \qquad y = x^2.$$

Supposons d'abord x négatif et très grand; en valeur absolue y est alors très grand et positif; par exemple, si $x = -1\,000$, $y = 1\,000\,000$. Lorsque x croît en restant négatif, c'est-à-dire prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est plus petite, y décroît; par exemple pour $x = -10$, $y = 100$; pour $x = -2$, $y = 4$; pour $x = -1$, $y = 1$; pour $x = -\frac{1}{10}$, $y = \frac{1}{100}$.

On voit que y se rapproche de zéro en même temps que x; pour $x = 0$, on a $y = 0$; ensuite, x continuant à croître pour prendre des valeurs positives de plus en plus grandes, y prend aussi des valeurs positives de plus en plus grandes. En résumé, on peut former le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	positif, décroît	0	positif, croît	$+\infty$

La fonction y est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ *et croissante dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Pour effectuer la représentation graphique des variations de y, traçons deux axes rectangulaires ox, oy (fig. 27)

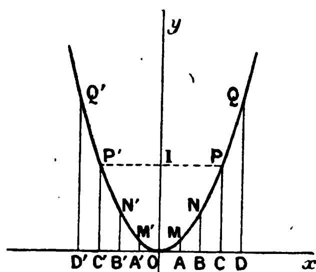


Fig. 27.

et choisissons une unité de longueur OB. Nous avons construit les points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ dont les abscisses sont :

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2.$$

Les ordonnées correspondantes doivent être :

$$AM = \frac{1}{4}, \quad BN = 1, \quad CP = \frac{9}{4}, \quad DQ = 4$$

$$A'M' = \frac{1}{4}, \quad B'N' = 1, \quad C'P' = \frac{9}{4}, \quad D'Q' = 4.$$

En réunissant par un trait continu les points Q′, P′, N′, M′, O′, M, N, P, Q, on obtient une courbe telle que nous l'avons figurée; cette courbe devrait être prolongée au delà des points Q et Q′, mais les dimensions forcément limitées de la figure ne nous permettent d'en représenter qu'une portion.

On remarque immédiatement que les ordonnées CP, C′P′ qui correspondent à deux abscisses opposées, OC, OC′ sont *égales;* la droite PP′ est donc parallèle à ox; cette droite PP′ est donc perpendiculaire à oy et de plus le point I où elle rencontre oy est le milieu de PP′, puisque O est le milieu de CC′. On peut donc, connaissant P, obtenir P′ en abaissant de P la perpendiculaire PI sur oy et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur $IP' = PI$. On exprime ce fait en disant que P′ est le symétrique de P par rapport à oy.

Comme ce raisonnement s'applique à tout point P de la branche OMNPQ, on dira que la branche OM′N′P′Q′ est *symétrique* de OMNPQ par rapport à oy. La courbe est donc formée de deux branches

symétriques l'une de l'autre par rapport à *oy : on dit alors que cette courbe admet oy comme axe de symétrie*.

Nous allons étudier d'un peu plus près l'allure de la courbe; soit M un point de la courbe (fig. 28); joignons-le au point O. Quelle sera la pente de OM? Si l'abscisse de M est x, son ordonnée est x^2; la pente de OM, égale au quotient de l'ordonnée de M par son abscisse est donc égale à x. On voit que cette pente est très voisine de zéro lorsque x est très petit; donc lorsque M se rapproche de O, OM tend à se confondre avec *ox*; de même lorsque x devient très grand, la pente devient très grande et la droite, telle que OR, se rapproche de plus en plus de *oy*. Ces remarques permettent de se rendre compte que l'allure générale de la courbe est bien celle que l'on a indiquée.

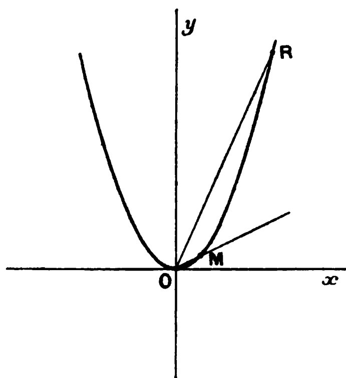


Fig. 28.

106. **Variations de $y = -x^2$ et de $y = ax^2$.** — Considérons maintenant la fonction :

$$y = -x^2.$$

Traçons deux axes *ox*, *oy*, choisissons une unité de longueur OB, et traçons la courbe $y = x^2$ que nous figurerons en pointillé (fig. 29).

Soit A un point quelconque de ox; à ce point A correspond le point M dont l'ordonnée $AM = \overline{OA}^2$.

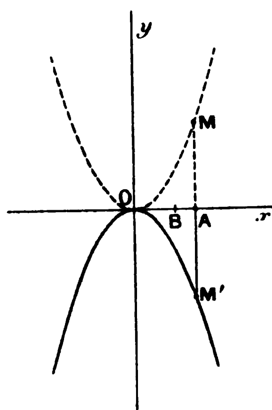


Fig. 29.

Quel est le point de la courbe $y = x^2$ qui correspond à la même abscisse? C'est un point M' dont l'ordonnée AM' est négative et a pour valeur absolue $\overline{OA}^2$; *donc* M' *est symétrique de* M *par rapport à* ox; à une même valeur quelconque de x correspondent dans les courbes $y = x^2$ et $y = -x^2$ *des ordonnées opposées*. On obtiendra donc la seconde courbe en construisant la symétrique de la première par rapport à ox.

On peut faire le tableau suivant des variations de la fonction $y = -x^2$:

x	$-\infty$		o		$+\infty$
y	$-\infty$	négatif, croît	o	négatif, décroît	$-\infty$

Considérons maintenant la fonction définie par l'équation :

$$y = ax^2,$$

dans laquelle a désigne une constante positive.

Il est facile de voir que la courbe qui représente les variations de y est tout à fait semblable de forme à celle que nous avons étudiée $y = x^2$. On peut même aller plus loin et montrer que ces deux équa-

tions seront représentées par *la même* courbe, si l'on choisit convenablement *les unités* de longueur. Proposons-nous en effet de construire la courbe représentée par l'équation :

$$y = 10\,x^2,$$

l'unité de longueur étant le centimètre; on remarquera que l'on peut écrire cette équation :

$$10y = (10x)^2.$$

Si nous faisons $x = \frac{2}{10}$ nous obtenons $10x = 2$; d'où :

$$10y = 2^2 = 4 \qquad y = \frac{4}{10}.$$

Donc au point d'abscisse $\frac{2}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire 2^{mm}, correspond une ordonnée égale à $\frac{4}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire à 4^{mm}. On verrait de même qu'aux abscisses $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ correspondent des ordonnées égales à $\frac{9}{10}$, $\frac{16}{10}$, $\frac{25}{10}$. En sorte que, si l'on construisait la courbe correspondant à l'équation :

$$y = x^2$$

en prenant le millimètre comme unité de longueur, on obtiendrait la même courbe que si l'on partait de l'équation :

$$y = 10x^2,$$

unité de

tenues ne
elles sont
les. Nous
ment dans

NCTIONS
NT

nter gra-
y définie

le même
y est d'au-
de x est

eur, nous
suivantes :

$OE' = -\frac{1}{4}$

$OE = \frac{1}{4}.$

r valeurs :

$E'R' = -4$

$ER = 4.$

P′, N′,

Q, R

sinés

s par

ourbe

nches

peut

limite

u sur

posi-

gnera

... nnée CP
... sulte que
... che indé-
... x comme

... *infinie de*
... *e la dis-*
... *te se rap-*
... *s'éloigne*

... N′P′ pro-
... à *ox;* et
... tes à *oy.*
... emarques
... métrie de

... Figurons
... dont les
... u suivant :

$$\ldots OS = \frac{1}{2}$$

$$\ldots OT = 2$$

$$\ldots OS' = -\frac{1}{2}$$

$$\ldots OT' = -2.$$

... $=$ OT; les
... tés *carrés;*
... J′T′; il en
... ués sur la
... e coïncide

... I'Q'J'
... sur le
... donc
... et N'
... JOJ'.

... -à-dire
... symé-
... de la

... d'un
... d'un
... et pas-
... ure de

l'angle xoy. En effet, le quadrilatère NQQ'N' dont les côtés NQ et N'Q' sont égaux et parallèles et dont les diagonales sont égales est un rectangle; donc FOF' est perpendiculaire sur le milieu de NQ' et de N'Q.

Nous avons ainsi démontré l'existence d'un centre et de deux axes de symétrie rectangulaires.

109. **Étude de la courbe** $y = \frac{c}{x}$. — Considérons d'abord le cas où $c = -1$, c'est-à-dire où l'on a la relation :

$$y = -\frac{1}{x}.$$

La discussion sera tout à fait analogue à celle qui vient d'être faite; la seule différence sera que y sera toujours de signe contraire à celui de x, de sorte que la courbe, au lieu de se trouver dans l'angle xoy et son opposé par le sommet, sera dans les deux autres angles formés par les axes (fig. 32); à l'abscisse positive OA correspond une ordonnée négative AP; et à l'abscisse négative OB' une ordonnée positive B'Q'; il n'y a rien à changer à ce que nous avons dit relativement aux asymptotes, au centre et aux axes de symétrie.

Supposons maintenant que nous ayons la courbe représentée par l'équation :

$$y = \frac{c}{x}$$

c étant positif; nous pourrons poser $c = a^2$, a étant positif et égal à $\sqrt{c}$; nous aurons donc :

$$y = \frac{a^2}{x},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}}.$$

Cette courbe sera la même que la courbe

$$y = \frac{1}{x},$$

si on les construit avec des unités de longueur dont

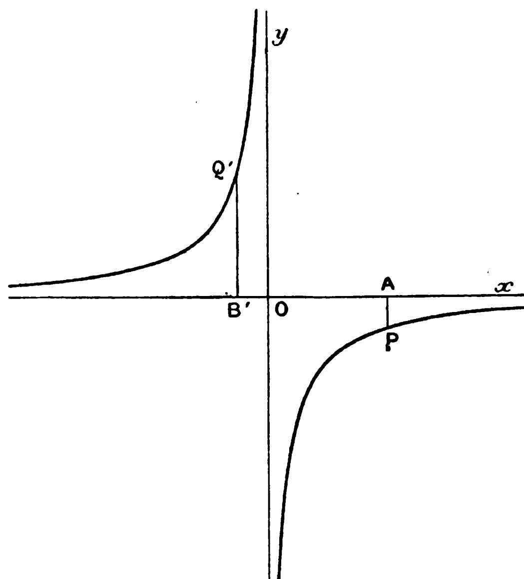


Fig. 32.

le rapport est égal à a. Si par exemple $a = 10$, la

ètre coïn-

mètre. En

,5, on a

le second

$c = -a^2$,

al à $\sqrt{-c}$

té de lon-

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX

150. — Construire la parabole :

$$y = \frac{3}{4} x^2,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

151. — Construire la même courbe en prenant pour unité de longueur : 1° le décimètre; 2° le millimètre.

152. — Construire la parabole :

$$y = 50\,000\, x^2$$

en prenant pour unité de longueur : 1° le mètre; 2° le décamètre.

153. — Construire la parabole :

$$y = -0{,}0002\, x^2$$

en prenant pour unité de longueur le dixième de millimètre.

154. — Construire la parabole :

$$y = x^2,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

155. — Construire la parabole :

$$y = x^2,$$

et la droite :

$$y = 2x + 3,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre. Mesurer les abscisses de leurs points communs et vérifier qu'elles sont égales aux racines de l'équation :

$$x^2 = 2x + 3.$$

156. — Même question pour la parabole :

$$y = \frac{1}{4} x^2$$

et la droite :

$$y = 2x + 15.$$

On prendra pour unité le millimètre.

157. — Résoudre les deux questions précédentes en se servant de papier quadrillé et en prenant pour unité la longueur d'un des côtés du carré.

158. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{3}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

159. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{-25\,000}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le dixième de millimètre.

160. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{0,001}{x}$$

en prenant pour unité de longueur le mètre.

161. — Construire l'hyperbole :

$$y = \frac{-3,5}{x}$$

et la droite :

$$y = -x + 4$$

en prenant pour unité le centimètre ; mesurer les abscisses de leurs points communs et vérifier qu'elles sont égales aux racines de l'équation :

$$\frac{-,5}{x} = -x + 4.$$

162. — Même question pour l'hyperbole :

$$y = \frac{200}{x}$$

et la droite :

$$y = x + 15$$

en prenant le millimètre pour unité.

163. — Résoudre les deux questions précédentes en se servant de papier quadrillé.

CHAPITRE X

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES. INTÉRÊTS COMPOSÉS

I. PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

110. **Progressions arithmétiques.** — On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, *forment une progression arithmétique ou sont en progression arithmétique* lorsque la différence de deux nombres consécutifs a toujours la même valeur (et le même signe). Par exemple, les nombres 3, 5, 7, 9 sont en progression arithmétique, car les différences 5 — 3, 7 — 5, 9 — 7 sont toutes égales à 2. De même les nombres 92, 82, 72, 62, 52 sont en progression arithmétique, car les différences 82 — 92, 72 — 82, etc., sont toutes égales à — 10. On donne à cette différence constante le nom de *raison* de la progression arithmétique; ainsi, dans notre premier exemple, la raison est 2; dans le second, la raison est — 10.

Lorsqu'on connaît le premier terme d'une progression arithmétique et la raison, il est facile

d'écrire les autres termes; il suffit d'ajouter successivement la raison à chaque terme pour avoir le terme suivant.

Exemple. — *Former une progression arithmétique composée de 6 termes, dont le premier terme soit 7 et la raison 5.* Les termes successifs sont : $7+5=12$; $12+5=17$; $17+5=22$; $22+5=27$; $27+5=32$, de sorte que la progression demandée est formée des termes suivants : 7, 12, 17, 22, 27, 32.

Autre exemple. — *Former une progression arithmétique composée de 5 termes dont le premier terme soit 13 et la raison —8.* On obtient, en procédant de la même manière, la progression : 13, 5, —3, —11, —19.

Il arrive souvent que l'on n'a pas besoin de connaître les termes intermédiaires de la progression, mais qu'on désire connaître la valeur du terme qui occupe un rang déterminé. On remarque alors que le *second* terme s'obtient en ajoutant au premier la raison; le *troisième* terme s'obtient en ajoutant au second la raison et, par suite, est égal au premier, *plus deux fois la raison;* le *quatrième* terme s'obtient en ajoutant encore la raison au troisième et par suite est égal au premier *plus trois fois la raison;* de même, le *cinquième* terme est égal au premier, *plus quatre fois la raison*, etc. Le *centième* terme serait égal au premier, *plus quatre-vingt-dix-neuf fois la raison.*

Règle. — *Pour obtenir la valeur d'un terme de rang déterminé d'une progression arithmétique, on ajoute au premier terme le produit de la raison par le rang donné, diminué d'une unité.*

Si l'on désigne par a le premier terme, par r la raison, par n le rang donné et par x la valeur du terme qui occupe ce rang, cette règle se traduit par la formule :

$$x = a + (n - 1)r.$$

Dans le cas où la raison est un nombre positif les termes successifs vont en croissant; la progression est *croissante;* elle est *décroissante* dans le cas où la raison est un nombre négatif.

111. **Progressions géométriques.** — On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, *forment une progression géométrique ou sont en progression géométrique* lorsque le quotient de deux nombres consécutifs a toujours la même valeur. Par exemple les nombres 3, 6, 12, 24 sont en progression géométrique car l'on a : $6 : 3 = 2$; $12 : 6 = 2$; $24 : 12 = 2$. Ce quotient 2 est dit la *raison* de la progression. De même les nombres 3600, 360, 36, 3,6, 0,36, forment une progression dont la raison est 0,1. Les nombres 2, -3, $\frac{9}{2}$, $\frac{-27}{4}$, forment une progression géométrique dont la raison est $\frac{-2}{3}$.

Lorsqu'on connaît le premier terme et la raison d'une progression géométrique, il est facile de calculer successivement tous les termes; il suffit de multiplier successivement chaque terme par la raison pour avoir le terme suivant.

Exemple. — *Former une progression géométrique de 5 termes dont le premier terme soit 625 et la raison 1,2.* On obtient successivement $625 \times 1{,}2 = 750$;

80 × 1,2
ac : 625,
que l'on
ng déter-
res. Dans
é est égal
troisième
la raison,
r le carré
ême égal
ison, etc.

ng donné
onnaît le
e premier
exposant
é.

e, par *r* la
rme cher-
:

re positif
et la pro-
; elle est
rieur à 1 ;
de la pro-
négatifs ;
ant que la
rieure à 1.

II. LOGARITHMES

112. **Définition des logarithmes**. — Considérons deux progressions croissantes, l'une arithmétique commençant par zéro, l'autre géométrique commençant par 1 ; si l'on désigne par r la raison de la progression arithmétique et par s la raison de la progression géométrique, ces deux progressions s'écriront :

$$0,\ r,\ 2r,\ 3r,\ 4r\dots,\ nr,\dots$$
$$1,\ s,\ s^2,\ s^3,\ s^4\dots,\ s^n,\dots$$

Nous conviendrons de dire que chaque terme de la progression arithmétique est le *logarithme* du terme de même rang de la progression géométrique; ainsi $3r$ est le logarithme de s^3, on dira aussi que s^3 est l'*antilogarithme* de $3r$; *c'est le nombre dont le logarithme est* $3r$. Il y a plusieurs *systèmes* de logarithmes, car on peut choisir de diverses manières les nombres s et r; nous ne considérerons que le système dit de *logarithmes vulgaires*, qui satisfait à la condition que le logarithme de 10 est égal à 1 ; nous verrons que cette condition entraîne de grandes simplifications dans les calculs. Nous ne démontrerons pas l'*existence* de ce système et nous n'indiquerons pas comment on peut calculer les logarithmes des divers nombres dans ce système. Observons seulement que, si l'on prend pour r un nombre très petit et pour s un nombre très voisin de 1, les termes consécutifs des deux progressions diffèrent très peu, de telle manière que tout nombre peut, avec une approximation

suffisante être considéré comme compris dans ces deux progressions. Pour avoir des logarithmes vulgaires, on prend :

$$r = 0,0001$$
$$s = 1,000230115...$$

et les progressions que l'on construit ainsi :

$$0,\ r,\ 2r, ...$$
$$1,\ s,\ s^2, ...,$$

sont telles que le 10 000e terme de la progression arithmétique est 1, tandis que le 10 000e terme de la progression géométrique est 10.

On a construit des tables dans lesquelles sont inscrits les logarithmes et les antilogarithmes de tous les nombres, avec un certain nombre de décimales ; nous allons en expliquer la disposition et l'usage en prenant comme type la table à 4 décimales qui se trouve à la fin de ce chapitre.

113. **Disposition des tables**. — La première de nos tables (*Logarithmes à 4 décimales* p. 248) fait connaître les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 et 10, de centième en centième, c'est-à-dire des nombres 1,00; 1,01 ; 1,02 ; .... ; 9,99. Nous savons que ces logarithmes sont des nombres compris entre 0 et 1 ; la table nous donnera leur partie décimale.

Soit, par exemple, à trouver dans la table le logarithme de 1,30 ; nous rechercherons, dans la colonne N, le nombre **13** formé des deux premiers chiffres du nombre donné ; et, dans la ligne qui commence par **13**, nous lirons le nombre contenu dans la colonne marquée **0** ; nous trouvons 1139 ; c'est la partie

décimale cherchée ; on a donc :

$$\log 1{,}30 = 0{,}1139.$$

Pour avoir le logarithme de 1,31 nous nous reporterons, dans la même ligne qui commence par **13**, à la colonne marquée **1**; nous ne trouvons que trois chiffres 173, car on a sous-entendu le premier chiffre 1, qui est le même que pour la colonne précédente, de sorte qu'il faut lire 1173, et que l'on a :

$$\log 1{,}31 = 0{,}1173.$$

En continuant dans la même ligne, nous aurions :

$$\log 1{,}32 = 0{,}1206$$
$$\log 1{,}33 = 0{,}1239,$$

et ainsi de suite.

Soit à rechercher le logarithme de 1,59; dans la ligne **15** et la colonne **9** nous lisons *014; le signe * signifie que le premier chiffre n'est pas 1 comme pour les logarithmes précédents de la même ligne, mais 2 qui se trouve au commencement de la ligne suivante ; on a :

$$\log 1{,}58 = 0{,}1987$$
$$\log 1{,}59 = 0{,}2014$$
$$\log 1{,}60 = 0{,}2041.$$

On remarquera que les lignes et les colonnes de la table sont groupées 5 par 5 ; cette disposition a pour but d'éviter les erreurs de lecture, car on arrive rapidement à se rendre compte de la place d'une ligne ou d'une colonne par rapport aux lignes et aux colonnes voisines, et on évite ainsi les

erreurs qui se produiraient si l'on ne suivait pas correctement la ligne ou la colonne, et que l'on confonde avec la ligne ou colonne voisines. Par exemple, on remarque que les lignes correspondant aux nombres : 10, 15, 20... suivent immédiatement un blanc; les lignes 11, 16, 21..., ne sont séparées du blanc que par une ligne; les lignes 14, 19, 24... précèdent un blanc, et les lignes 13, 18, 23... n'en sont séparées que par une ligne; enfin les lignes 12, 17, 22... occupent le milieu d'un groupe de 5 lignes sans blanc; il en est de même pour les colonnes, sauf que le blanc est remplacé par un double trait. A l'aide de ces remarques, un peu d'habitude suffit pour trouver un logarithme d'un seul coup d'œil.

La disposition des tables d'antilogarithmes est tout à fait analogue. Ces tables font connaître les antilogarithmes des nombres compris entre 0 et 1, de millième en millième, c'est-à-dire des nombres 0,001; 0,002; ......; 0,999. Soit à rechercher l'antilogarithme de 0,324; on se reportera, dans la colonne marquée L, au nombre **32**; et dans la ligne qui commence par **32**, à la colonne **4**; on y lit les trois chiffres 109 à la gauche desquels on inscrit le chiffre 2 qui se trouve dans la première colonne, en face de **31**; l'antilogarithme cherché est donc 2,109. De même, on trouverait que l'antilogarithme de 0,325 est 2,113. L'usage du signe * est le même dans cette table que dans la précédente; il indique que le premier chiffre par lequel on doit compléter l'antilogarithme cherché doit être pris en tête de la ligne suivante, et non des lignes précédentes. Par exemple, l'antilogarithme de 0,848 est 7,047.

114. **Propriété fondamentale des logarithmes.** — La propriété fondamentale des logarithmes est la suivante : *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

En effet, si nous nous reportons aux progressions par lesquelles nous avons défini les logarithmes, nous voyons que les nombres s^m et s^n ont pour logarithmes mr et nr; leur produit est s^{m+n} et a pour logarithme $(m+n)r$, ce qui justifie bien notre énoncé.

Cette propriété fondamentale permet de simplifier bien des calculs; elle est l'origine des applications des logarithmes et la raison de leur utilité pratique. Soit, en effet, à effectuer le produit de plusieurs nombres; à calculer, par exemple, le nombre x donné par la formule :

$$x = 1,33 \times 2,15 \times 2,31 \times 1,48.$$

D'après la propriété fondamentale, nous aurons :

$$\log x = \log 1,33 + \log 2,15 + \log 2,31 + \log 1,48.$$

Mais la table nous donne ces logarithmes et il suffit de les ajouter pour avoir log x.

$$\begin{array}{l} \log 1,33 = 0,1239 \\ \log 2,15 = 0,3324 \\ \log 2,31 = 0,3636 \\ \log 1,48 = 0,1703 \\ \hline \log x \quad = 0,9902 \end{array}$$

Connaissant log x nous rechercherons dans la table d'antilogarithmes l'antilogarithme de 0,990; c'est 9,772; tel est le produit cherché. En réalité,

le dernier chiffre décimal trouvé n'est pas exact; cela tient à ce que les valeurs écrites pour les logarithmes ne sont jamais exactes, puisqu'on n'a que 4 décimales; mais, dans la pratique, il est souvent très suffisant d'avoir trois chiffres exacts; par exemple, si x désigne un nombre inconnu de francs, on prendra $x = 9^{fr}77$ (et même, le plus souvent, $9^{fr}75$).

Autre exemple. — *Calculer le nombre y donné par la formule :*

$$y = 1,36 \times 1,37 \times 1,38 \times 1,39 \times 1,40 \times 1,41.$$

Nous trouvons dans la table des logarithmes des nombres donnés; en les ajoutant, on a log y.

$$\begin{aligned} \log 1,36 &= 0,1335 \\ \log 1,37 &= 0,1367 \\ \log 1,38 &= 0,1399 \\ \log 1,39 &= 0,1430 \\ \log 1,40 &= 0,1461 \\ \log 1,41 &= 0,1492 \\ \hline \log y \quad &= 0,8484 \end{aligned}$$

Pour avoir y il suffit de chercher l'antilogarithme de 0,8484; on trouve dans la table que l'antilogarithme de 0,848 est 7,047 et que l'antilogarithme de 0,849 est 7,063; l'antilogarithme de 0,8484 est compris entre les deux[1]; nous pouvons prendre 7,05, pour n'écrire que des chiffres exacts.

Division. — *Le logarithme d'un quotient est égal*

1. Nous ne pouvons développer ici ce point; l'élève y réfléchira lui-même et se trouvera ainsi préparé à comprendre plus tard l'emploi des parties proportionnelles.

à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.

En effet, la formule :

$$a = bc,$$

entraîne :

$$\log a = \log b + \log c,$$

donc la formule :

$$b = \frac{a}{c}$$

entraîne :

$$\log b = \log a - \log c.$$

EXEMPLE. — *Calculer le nombre x donné par la formule :*

$$x = \frac{8,34}{1,23}.$$

On a :

$$\begin{array}{r} \log 8,34 = 0,9212 \\ \log 1,23 = 0,0899 \\ \hline \log \ x = 0,8313 \\ x = 6,78. \end{array}$$

Nous verrons plus loin que l'on procède souvent d'une manière plus simple, en utilisant les cologarithmes.

115. **Puissances et racines**. — L'emploi des logarithmes est particulièrement commode lorsque l'on veut calculer une puissance ou extraire une racine. Soit, en effet :

$$a = b^4.$$

Le nombre a est égal au produit de 4 nombres

b,

uissance de

495.

de 0,4495;
l'antiloga-
très voisin

nons cette

racine par y. On a :

$$\log y = \frac{1}{4} \log 3,14 = \frac{1}{4} \times 0,4969 = 0,1242.$$

La table d'antilogarithmes donne 1,33 pour antilogarithme de 0,124; c'est une valeur très approchée de y.

116. **Logarithmes des nombres non compris entre 1 et 10.** — La table nous fait connaître, comme nous l'avons dit, les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10; pour obtenir les logarithmes des autres nombres, on utilise la propriété fondamentale :

$$\log a = \log b + \log c.$$

Nous ne nous attarderons pas à démontrer que l'ensemble des logarithmes ainsi définis possède bien toujours cette propriété fondamentale, ni que cette définition est équivalente à celle que l'on pourrait déduire des progressions déjà considérées.

Soit, par exemple, à trouver le logarithme de 134; on remarquera que l'on a :

$$134 = 1,34 \times 10 \times 10.$$

On en conclut :

$$\log 134 = \log 1,34 + 2 \log 10.$$

Or la table donne :

$$\log 1,34 = 0,1271$$

et l'on sait que l'on a :

$$\log 10 = 1.$$

Il en résulte :

$$\log 134 = 0,1271 + 2 = 2,1271.$$

On voit que la partie décimale est la même pour log 134 que pour log 1,34; comme c'est cette partie décimale que fournit la table, on en conclut que, pour rechercher le logarithme d'un nombre dans la table, *il n'y a pas à s'inquiéter de la virgule.* La partie entière du logarithme est ici 2; on voit qu'elle est égale au nombre de décimales qu'il faut séparer pour avoir un nombre compris entre 1 et 10; on peut dire aussi qu'elle est égale au nombre des chiffres non décimaux, *diminué d'une unité.* On donne à cette partie entière le nom de *caractéristique.*

Exemples. — *Trouver le logarithme* de 120 000; la table donne la partie décimale 0792; la caractéristique est 5; le logarithme cherché est donc 5,0792.

Trouver le logarithme de 34,5; la table donne la partie décimale 5378: la caractéristique est 1; le logarithme est donc 1,5378.

Trouver l'antilogarithme de 2,343, c'est à-dire le nombre dont le logarithme est 2,343. On cherchera dans la table le nombre dont le logarithme est 0,343 et on le multipliera par 100, puisque la caractéristique est 2; on trouve ainsi 220,3.

Trouver l'antilogarithme de 3. On n'a pas besoin de la table pour savoir que l'antilogarithme de 0 est 1; l'antilogarithme de 3 est 1000.

Applications. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = 34,2 \times 46,3 \times 2,35 \times 15,4.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \log 34{,}2 &= 1{,}5328 \\ \log 46{,}3 &= 1{,}6656 \\ \log 2{,}35 &= 0{,}3711 \\ \log 15{,}4 &= 1{,}1875 \\ \hline \log x &= 4{,}7570 \end{aligned}$$

On cherchera l'antilogarithme de 0,757, qui est 5,715, et on reculera la virgule de 4 rangs vers la droite, puisque la caractéristique de log x est 4; on obtient ainsi $x = 57150$; mais, bien entendu, on ne peut pas compter sur l'exactitude des deux derniers chiffres. Pour avoir un plus grand nombre de chiffres exacts, il faudrait employer des tables à un plus grand nombre de décimales; mais ce n'est souvent pas nécessaire.

117. **Nombres inférieurs à 1. Caractéristiques négatives.** — Soit à rechercher le logarithme de 0,00341 ; nous pouvons écrire :

$$0{,}00341 = \frac{3{,}41}{1000}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \log 0{,}00341 &= \log 3{,}41 - \log 1000 \\ &= 0{,}5328 - 3. \end{aligned}$$

Le logarithme cherché est donc égal à 0,5328 — 3, c'est-à-dire à — 2,4672; c'est un nombre négatif; il en est ainsi pour tous les logarithmes de tous les nombres inférieurs à un.

En pratique, *on n'effectue jamais la soustraction;* au lieu d'écrire :

$$0{,}5328 - 3,$$

on convient d'écrire :

$$\bar{3},5328,$$

en plaçant un trait au-dessus du chiffre 3; par définition, c'est la même chose que $-3 + 0,5328$, c'est-à-dire que $-2,4672$. Le chiffre $\bar{3}$ est une *caractéristique négative.*

Pour ajouter deux ou plusieurs logarithmes, on ajoute les parties décimales; si leur somme a une partie entière, on la retient, et on l'ajoute aux caractéristiques en tenant compte de leurs signes.

Exemple I. — *Calculer le produit :*

$$x = 23,5 \times 0,824.$$

On a :

$$\begin{array}{ll} \log 23,5 & = 1,3711 \\ \log\ 0,824 & = \bar{1},9159 \\ \hline \log x & = 1,2870 \end{array}$$

Pour faire l'addition, on procède d'abord comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ordinaires; quand on arrive à la colonne des unités, on a 1 de retenue, 1, et $\bar{1}$, c'est-à-dire $1 + 1 - 1 = 1$.

On trouve ainsi :

$$x = 19,36.$$

Exemple II. — *Calculer le produit :*

$$x = 234 \times 0,0325 \times 22,3 \times 0,98 \times 80.$$

On a :

$$\begin{array}{ll} \log 234 & = 2,3692 \\ \log\ 0,325 & = \bar{2},5119 \\ \log\ 22,3 & = 1,3483 \\ \log\ 0,98 & = \bar{1},9912 \\ \log\ 80 & = 1,9031 \\ \hline \log x & = 4,1237 \end{array}$$

On a 3 de retenue dans la colonne des unités, qui s'ajoutent aux caractéristiques 2, $\bar{2}$, 1, $\bar{1}$, 1, ce qui donne $3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1 = 4$. On trouve ainsi $x = 13\,290$ environ.

Exemple III. — *Calculer* $\sqrt[4]{0{,}0325}$.

On a $\log 0{,}0325 = \bar{2},2099$. Il faut en prendre le quart; pour cela, on remarque que l'on a :

$$\bar{2},2099 = -2 + 0{,}2099 = -4 + 2{,}2099.$$

On prendra le quart de -4 qui est -1 et ensuite le quart de 2,2099, ce qui donne 0,5524; on obtient ainsi $\bar{1},5524$, dont l'antilogarithme est 0,3556.

118. **Emploi des cologarithmes.** — De même que l'on n'écrit pas de logarithmes négatifs, on évite d'avoir à retrancher un logarithme; on remarque que retrancher un nombre équivaut à ajouter le nombre opposé; le nombre opposé à un logarithme s'appelle le cologarithme Le cologarithme s'écrit à vue d'œil, par la condition que la somme du logarithme et du cologarithme soit égale à 0.

Exemple. — *Le logarithme d'un nombre est* 1,3032; *quel est son cologarithme?* On voit que c'est $\bar{2},6968$ car si l'on fait l'addition :

$$\begin{array}{r} 1{,}3032 \\ \bar{2},6968 \\ \hline 0{,}0000 \end{array},$$

on obtient $8 + 2 = 10$; je pose 0 et retiens 1 ; 3 et 6 font 9, plus un de retenue font 10; je pose zéro et retiens 1, etc.

On voit que le succès tient à ce que la somme

des deux chiffres de droite est 10, la somme des chiffres décimaux écrits au-dessous l'un de l'autre étant 9 et la somme des caractéristiques étant — 1. D'où la règle :

Règle. — *Étant donné un logarithme, pour écrire le cologarithme, on détermine la caractéristique par la condition que la somme des deux caractéristiques soit — 1 et les autres chiffres, par la condition que la somme des chiffres correspondants soit égale à 9, sauf pour les derniers, dont la somme doit être 10.*

119. **Résumé des règles pour l'usage des tables.** Partie décimale. — La partie décimale d'un logarithme se trouve dans la table; la partie décimale d'un cologarithme s'écrit à vue, d'après la partie décimale lue dans la table pour le logarithme; si l'on lit 1324, on écrit 8676, en disant mentalement :

$$1+8=9;\quad 3+6=9;\quad 2+7=9;\quad 4+6=10.$$

Caractéristique. — La caractéristique d'un logarithme est égale au nombre de rangs dont il faut déplacer la virgule pour obtenir un nombre compris entre 1 et 10; elle est positive si le nombre donné était supérieur à 10 et négative s'il était inférieur à 1. La caractéristique du cologarithme s'obtient en retranchant de — 1 la caractéristique du logarithme; on peut dire aussi que, si le nombre est plus grand que 1, elle est négative, et a pour valeur absolue le nombre de chiffres de la partie entière; si le nombre est inférieur à 1 elle est nulle ou positive, et égale au nombre de zéros qui suivent la virgule.

Antilogarithmes. — On recherche les antiloga-

rithmes dans la table en ne tenant compte que de la partie décimale; la caractéristique indique ensuite de combien de rangs il faut déplacer la virgule, vers la droite si elle est positive, vers la gauche si elle est négative.

120. **Disposition des calculs**. — Lorsqu'on a à calculer une formule par logarithmes, on commence par disposer le calcul avant de chercher aucun nombre dans la table; on écrit en même temps les caractéristiques, que l'on connaît sans avoir à les chercher dans la table.

Exemple I. — Soit à calculer la valeur x donnée par la formule :

$$x = \frac{3{,}45 \times 3{,}34 \times 35{,}2}{894 \times 0{,}034}.$$

Le log de x s'obtient en ajoutant les logarithmes des facteurs qui sont au numérateur et retranchant les logarithmes de ceux qui sont au dénominateur; il revient au même d'additionner leurs cologarithmes. On disposera donc le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{ll}
\log\ 3{,}45 & = 0, \\
\log\ 3{,}34 & = 0, \\
\log\ 35{,}2 & = 1, \\
\text{colog}\ 894 & = \bar{3}, \\
\text{colog}\ 0{,}034 & = 1, \\
\hline
\log x & = \\
x & =
\end{array}$$

Le calcul étant ainsi disposé, on recherchera dans la table les parties décimales; on aura ainsi :

$$\begin{aligned}
\log\ 3,45 &= 0,5378\\
\log\ 3,34 &= 0,5237\\
\log\ 35,2 &= 1,5465\\
\operatorname{colog} 894 &= \bar{3},0487\\
\operatorname{colog}\ 0,034 &= 1,4685\\
\hline
\log x &= 1,1252
\end{aligned}$$

d'où :

$$x = 13,34.$$

On a écrit à vue les colog.

Dans le cas où il y a des calculs auxiliaires à effectuer, on a soin de les disposer aussi d'avance.

Exemple II. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = \frac{(34,2)^2 \times \sqrt[3]{3,5}}{\sqrt[4]{3,45 \times 872}}$$

On disposera le calcul comme il suit.

CALCULS AUXILIAIRES.

$$\log 34,2 = 1, \qquad \log 3,5 = 0,$$

$$2 \log 34,2 = \qquad \frac{1}{3} \log 3,5 =$$

$$\begin{aligned}
\log\ 3,45 &= 0,\\
\log 872 &= 2,\\
\hline
\log\ 3,45 \times 872 &=\\
\frac{1}{4} \log\ 3,45 \times 872 &=\\
\operatorname{colog} \sqrt[4]{3,45 \times 872} &=
\end{aligned}$$

CALCUL DÉFINITIF.

$$
\begin{array}{rl}
2\log 34{,}2 & = \\
\frac{1}{3}\log 3{,}5 & = \\
\operatorname{colog} \sqrt[4]{3{,}45 \times 872} & = \\
\hline
\log x & = \\
x & =
\end{array}
$$

Une fois ce tableau fait, mais alors seulement, on consultera la table pour rechercher les parties décimales laissées en blanc.

Remarque. — Bien des erreurs sont souvent occasionnées par la transcription des résultats intermédiaires; ainsi, dans le tableau précédent, tous les logarithmes du calcul définitif sont transcrits; il est bon de s'habituer, autant que posssible, à éviter cette transcription; pour cela, on adoptera, par exemple, la disposition suivante :

CALCULS AUXILIAIRES.

$$
\begin{array}{rl}
\log 34{,}2 & = 1, \\
\log 3{,}5 & = 0, \\
\hline
\log 3{,}45 & = 0, \\
\log 872 & = 2, \\
\hline
\log 3{,}45 \times 872 & = \\
\frac{1}{4}\log 3{,}45 \times 872 & =
\end{array}
$$

CALCUL DÉFINITIF.

$$
\begin{array}{rl}
2\log 34{,}2 & = \\
\frac{1}{3}\log 3{,}5 & = \\
\operatorname{colog} \sqrt[4]{3{,}45 \times 872} & = \\
\hline
\log x & = \\
x & =
\end{array}
$$

III. INTÉRÊTS COMPOSÉS

L'une des questions pratiques dans lesquelles l'usage des logarithmes est le plus utile est le calcul des intérêts composés ; c'est pourquoi l'on a l'habitude de les étudier après les logarithmes, bien que ce soient là des théories bien dissemblables et qu'il n'est guère logique d'associer.

121. **Intérêts composés**. — On dit qu'une somme d'argent est placée à intérêts composés lorsque les intérêts produits par cette somme au bout d'une certaine période ne sont pas payés au créancier, mais s'ajoutent au capital pour porter eux mêmes intérêts. La période au bout de laquelle les intérêts sont ainsi *capitalisés* est généralement de 6 mois ou d'un an ; nous ne nous occuperons que du cas où elle est d'un an. Ainsi, Pierre prête à Paul 10 000fr à intérêts composés, au taux de 5 0/0 l'an ; cela signifie qu'au bout d'un an, Paul ne payera pas à Pierre les 500fr d'intérêt annuel que doivent rapporter les 10 000 au taux de 5 0/0, mais que sa dette se trouvera être de 10 500fr, lesquels rapporteront dès lors 5 0/0 d'intérêt, c'est-à-dire 525fr en un an ; au bout de la seconde année, la dette de Paul sera donc 10 500 + 525, c'est-à-dire 11 025fr, lesquels rapporteront intérêt à 5 0/0, soit 551fr,25 en un an. Au bout de la troisième année, la dette de Paul sera donc : 11 025 + 551,25 = 11 576fr,25, et ainsi de suite.

Au premier abord, il peut sembler fort naturel que l'intérêt non payé vienne ainsi augmenter la dette et rapporte lui-même intérêt ; il ne semble pas

qu'il y ait là un problème essentiellement différent de celui des intérêts simples, mais seulement un cas particulier. Mais ce cas particulier est d'une très grande importance dans beaucoup de questions pratiques; de plus, la progression très rapide des intérêts accumulés pendant un grand nombre d'années conduit à des conséquences véritablement effrayantes, qui ont nécessité une réglementation spéciale des prêts à intérêts composés (lois sur la prescription quinquennale des arrérages; surveillance de l'État sur les sociétés d'assurance et de retraites, sur le Crédit foncier, etc.). Nous verrons en effet que la possibilité de placements à intérêts composés sans aucune réglementation entraînerait des conséquences tout à fait inadmissibles.

122. **Formule des intérêts composés.** — Soit A une somme, placée au taux de a o/o l'an; c'est-à-dire que 100[fr] rapportent a francs; la somme A rapporte par suite $\frac{Aa}{100}$; et l'intérêt, ajouté au capital, donne au bout d'un an une dette totale de :

$$A + \frac{Aa}{100} = A\left(1 + \frac{a}{100}\right).$$

Ainsi, on a la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir la valeur totale d'une somme* A *augmentée de ses intérêts, au bout d'un an, on multiplie cette somme par le binome* $1 + \frac{a}{100}$, *a étant le taux.*

Nous pouvons appliquer cette même règle à la somme $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)$ qui se trouve placée pendant

une nouvelle année; nous trouvons ainsi qu'au bout de deux ans, la dette totale est devenue :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{a}{100}\right)=A\left(1+\frac{a}{100}\right)^2.$$

On pourra appliquer encore la même règle, et l'on obtiendra, pour la valeur de la dette au bout de la 3e année :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^2\left(1+\frac{a}{100}\right)=A\left(1+\frac{a}{100}\right)^3.$$

Au bout de n années, la dette deviendrait :

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$$

d'où la règle :

Règle. — *Pour avoir la valeur totale, capital et intérêts, d'une somme* A *placée à intérêts composés pendant n années, on multiplie cette somme* A *par la* n^e *puissance du binome* $1+\frac{a}{100}$, *a étant le taux annuel pour 100.*

123. Applications. — Problème I. *Une somme de 10 000fr est placée à intérêts composés pendant 20 ans, au taux de 4 0/0. Quelle est la somme totale due au bout de ces 20 ans ?*

On a ici :

$$A=10\,000, \qquad a=4, \qquad 1+\frac{a}{100}=1{,}04;$$

on obtient donc :

$$10\,000\times(1{,}04)^{20}.$$

Calculons cette expression par logarithmes.

On a :

$$\begin{array}{rl} \log\ 1{,}04 & = 0{,}0170 \\ 20 \log\ 1{,}04 & = 0{,}34 \\ \log 10\,000 & = 4 \\ \hline & 4{,}34 \end{array}$$

Il faut rechercher l'antilogarithme de 4,34 ; on trouve 21 880 ; le résultat cherché est donc 21 880[fr] ; la somme de 10 000[fr] est plus que doublée.

Remarque. — On voit que l'on est amené à multiplier par 20 le logarithme de 1,04 ; l'erreur commise sur ce logarithme par le fait que l'on néglige les décimales qui suivent la 4[e] se trouve ainsi notablement augmentée ; aussi est-il utile, pour les problèmes d'intérêts composés, d'avoir les valeurs très exactes des logarithmes du binome $1 + \frac{a}{100}$ pour les valeurs du taux a qui sont les plus usitées. Nous les donnons ci-dessous avec 10 décimales :

a	$1 + \frac{a}{100}$	$\log\left(1 + \frac{a}{100}\right)$
2	1,02	0,0086001718
2 1/4	1,0225	0,0096633167
2 1/2	1,0250	0,0107238654
2 3/4	1,0275	0,0117818305
3	1,03	0,0128372247
3 1/4	1,0325	0,0138900603
3 1/2	1,035	0,0149403498
3 3/4	1,0375	0,0159881054
4	1,04	0,0170333393

Bien entendu, on ne prendra que le nombre de

décimales nécessaires pour avoir 4 décimales exactes après la multiplication ; en général, 6 décimales suffiront, à moins que le temps ne soit très long.

PROBLÈME II. — *Quelle somme faut-il placer à intérêts composés, à 3 0/0, pour toucher 1000fr dans 50 ans ?*

En désignant par x la somme cherchée, on a :

$$x(1,03)^{50} = 1000$$
$$\log x = 3 - 50 \log 1,03.$$

Or, on a :

$$\log 1,03 = 0,012837$$
$$50 \log 1,03 = 0,64185$$
$$\text{colog}(1,03)^{50} = \bar{1},35815$$
$$3$$
$$\log x = 2,35815$$

On trouve dans la table que 0,358 a pour antilogarithme 2,280. On a donc $x = 228^{fr}$ environ.

PROBLÈME III. — *Les héritiers d'un fournisseur de la cour de Louis XIV réclament une somme de 234fr qui leur serait due depuis le 15 février 1675 avec les intérêts composés à 4 0/0 depuis cette date. Quelle somme aurait dû leur payer le gouvernement français le 15 février 1903, si leur réclamation avait été admise ?*

La durée de la dette est 1903 — 1675 = 228 ans ; la somme due serait donc :

$$x = 234(1,04)^{228}.$$

Or, on a :

$$\begin{array}{r} \log 1{,}04 = 0{,}0170333 \\ 228 \\ \hline 1362664 \\ 340666 \\ 340666 \\ \hline 228 \log 1{,}04 = 3{,}8835924 \\ \log 234 = 2{,}3692 \\ \hline \log x = 6{,}25279 \end{array}$$

L'antilogarithme de 0,25279 est environ 1,789 ; la somme due s'élèverait donc à 1 789 000fr environ.

PROBLÈME IV. — *Quelle est la somme produite par 1fr placé à intérêts composés pendant 1000 ans, à 2 0/0 l'an?*

Cette somme est :

$$x = (1{,}02)^{1000}.$$

On a donc :

$$\log x = 1\,000 \log 1{,}02 = 8{,}600\,17.$$

On en conclut $x = 398\,100\,000$, c'est-à-dire près de 400 millions de francs.

PROBLÈME V. — *Dans un tombeau égyptien, remontant à 4000 ans, on découvre une pièce de bronze d'une valeur de 0fr,05 ; quelle somme aurait rapportée cette pièce aux héritiers de son propriétaire, si elle avait été placée à intérêts composés au taux de 3 1/2 0/0 ?*

La somme x cherchée est donnée par la formule :

$$x = 0{,}05 \times (1{,}035)^{4000}.$$

Nous avons :

$$\log 1{,}035 = 0{,}014940349 8$$
$$4000 \log 1{,}035 = 59{,}7613992$$
$$\log 0{,}05 = \bar{2}{,}6990$$
$$\log x = 58{,}4603992$$

L'antilogarithme de 0,46 est 2,884 ; il faut déplacer la virgule de 58 rangs vers la droite, ce qui donne un nombre de *millions de milliards de francs* qui s'écrit :

28 840 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

164. — Trouver le 6e terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2 et la raison 4.

165. — Trouver le 5e terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 4 et la raison 2.

166. — On raconte que l'inventeur du jeu des échecs demanda comme récompense : 1 grain de blé pour le première case de l'échiquier, 2 grains pour la seconde, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours, jusqu'à la 64e case. Combien de grains de blé aurait-il fallu lui donner pour cette 64e case ?

167. — Quels sont les logarithmes des nombres suivants :

32,5	0,309
3240	82,4
60000	0,008
3,02	0,00345
0,304	320 0000

168. — Quels sont les cologarithmes des nombres précédents ?

169. — Former les produits par 2 et les quotients par 2

des logarithmes suivants :

2,3425	1,8564
$\bar{2}$,3425	$\bar{2}$,8564
$\bar{3}$,3425	$\bar{3}$,8564
3,3425	2,8564

170. — Quels sont les antilogarithmes des nombres suivants :

$\bar{3}$,342	2,425
$\bar{4}$,324	$\bar{2}$,438
0,435	$\bar{9}$,575
15,234	8,937

171. — Calculer par logarithmes les expressions suivantes :

$$x = \frac{(0,035)^4 \sqrt{875000}}{342 \times 3,46 \times \sqrt[3]{2,34}}$$

$$y = \frac{\sqrt{35}\ \sqrt[3]{42}\ \sqrt[5]{26400}}{(1,34)^6\ (3,42)^7}$$

172. — Quelle est la valeur totale d'une somme de 500^{fr} placés à intérêts composés pendant 8 ans au taux de 3 o/o.

173. — Quelle somme doit-on placer à intérêts composés au taux de 4 o/o pour obtenir 1 000 000^{fr} au bout de 75 ans ?

174. — Pendant combien d'années doivent rester placés 1000^{fr} à intérêts composés, au taux de 4 o/o pour que la valeur totale, capital et intérêts, devienne égale à 1540^{fr} ?

175. — Pendant combien d'années doit rester placé un capital de 2000^{fr} au taux de 3 o/o pour que la somme du capital et des intérêts accumulés atteigne 5000^{fr} ?

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	1761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	3979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	5441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	6532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	8129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	8751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	9294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	9542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	9777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

Table d'antilogarithmes à quatre décimales.

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	002	005	007	009	012	014	016	019	021
01	023	026	028	030	033	035	038	040	042	045
02	047	050	052	054	057	059	062	064	067	069
03	072	074	076	079	081	084	086	089	091	094
04	096	099	102	104	107	109	112	114	117	119
05	1122	125	127	130	132	135	138	140	143	146
06	148	151	153	156	159	161	164	167	169	172
07	175	178	180	183	186	189	191	194	197	199
08	202	205	208	211	213	216	219	222	225	227
09	230	233	236	239	242	245	247	250	253	256
10	1259	262	265	268	271	274	276	279	282	285
11	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315
12	318	321	324	327	330	334	337	340	343	346
13	349	352	355	358	361	365	368	371	374	377
14	380	384	387	390	393	396	400	403	406	409
15	1413	416	419	422	426	429	432	435	439	442
16	445	449	452	455	459	462	466	469	472	476
17	479	483	486	489	493	496	500	503	507	510
18	514	517	521	524	528	531	535	538	542	545
19	549	552	556	560	563	567	570	574	578	581

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1585	589	592	596	600	603	609	611	614	618
21	622	626	629	633	637	641	644	648	652	656
22	660	663	667	671	675	679	683	687	690	694
23	698	702	706	710	714	718	722	726	730	734
24	738	742	746	750	754	758	762	766	770	774
25	1778	782	786	791	795	799	803	807	811	816
26	820	824	828	832	837	841	845	849	854	858
27	862	866	871	875	879	884	888	892	897	901
28	905	910	914	919	923	928	932	936	941	945
29	950	954	959	963	968	972	977	982	986	991
30	1995	*000	*004	*009	*014	*018	*023	*028	*032	*037
31	2042	046	051	056	061	065	070	075	080	084
32	089	094	099	104	109	113	118	123	128	133
33	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183
34	188	193	198	203	208	213	218	223	228	234
35	2239	244	249	254	259	265	270	275	280	286
36	291	296	301	307	312	317	323	328	333	339
37	344	350	355	360	366	371	377	382	388	393
38	399	404	410	415	421	427	432	438	443	449
39	455	460	466	472	477	483	489	495	500	506
40	2512	518	523	529	535	541	547	553	559	564
41	570	576	582	588	594	600	606	612	618	624
42	630	636	642	649	655	661	667	673	679	685
43	692	698	704	710	716	723	729	735	742	748
44	754	761	767	773	780	786	793	799	805	812
45	2818	825	831	838	844	851	858	864	871	877
46	884	891	897	904	911	917	924	931	938	944
47	951	958	965	972	979	985	992	999	*006	*013
48	3020	027	034	041	048	055	062	069	076	083
49	090	097	105	112	119	126	133	141	148	155
50	3162	170	177	184	192	199	206	214	221	228
51	236	243	251	258	266	273	281	289	296	304
52	311	319	327	334	342	350	357	365	373	381
53	388	396	404	412	420	428	436	443	451	459
54	467	475	483	491	499	508	516	524	532	540
55	3548	556	565	573	581	589	597	606	614	622
56	631	639	648	656	664	673	681	690	698	707
57	715	724	733	741	750	758	767	776	784	793
58	802	811	819	828	837	846	855	864	873	882
59	890	899	908	917	926	936	945	954	963	972

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	3981	990	999	*009	*018	*027	*036	*046	*055	*064
61	4074	083	093	102	111	121	130	140	150	159
62	169	178	188	198	207	217	227	236	246	256
63	266	276	285	295	305	315	325	335	345	355
64	365	375	385	395	406	416	426	436	446	457
65	4467	477	487	498	508	519	529	539	550	560
66	571	581	592	603	613	624	634	645	656	667
67	677	688	699	710	721	732	742	753	764	775
68	786	797	808	819	831	842	853	864	875	887
69	898	909	920	932	943	955	966	977	989	*000
70	5012	023	035	047	058	070	082	093	105	117
71	129	140	152	164	176	188	200	212	224	236
72	248	260	272	284	297	309	321	333	346	358
73	370	383	395	408	420	433	445	458	470	483
74	495	508	521	534	546	559	572	585	598	610
75	5623	636	649	662	675	689	702	715	728	741
76	754	768	781	794	808	821	834	848	861	875
77	888	902	916	929	943	957	970	984	998	*012
78	6026	039	053	067	081	095	109	124	138	152
79	166	180	194	209	223	237	252	266	281	295
80	6310	324	339	353	368	383	397	412	427	442
81	457	471	486	501	516	531	546	561	577	592
82	607	622	637	653	668	683	699	714	730	745
83	761	776	792	808	823	839	855	871	887	902
84	918	934	950	966	982	998	*015	*031	*047	*063
85	7079	096	112	129	145	161	178	194	211	228
86	244	261	278	295	311	328	345	362	379	396
87	413	430	447	464	482	499	516	534	551	568
88	586	603	621	638	656	674	691	709	727	745
89	762	780	798	816	834	852	870	889	907	925
90	943	962	980	998	*017	*035	*054	*072	*091	*110
91	8128	147	166	185	204	222	241	260	279	299
92	318	337	356	375	395	414	433	453	472	492
93	511	531	551	570	590	610	630	650	670	690
94	710	730	750	770	790	810	831	851	872	892
95	8913	933	954	974	995	*016	*036	*057	*078	*099
96	9120	141	162	183	204	226	247	268	290	311
97	333	354	376	397	419	441	462	484	506	528
98	550	572	594	616	638	661	683	705	727	750
99	772	795	817	840	863	886	908	931	954	977

TABLE DES MATIÈRES

4-03.